

Les méthodes de factorisation

Rappelons que :

Factoriser signifie : *transformer une somme en un produit.*

Comment reconnaître une somme ou un produit ?

Une **somme** est le *résultat de l'addition* de deux ou plusieurs **termes**.

Exemples :

- (1) $a + b + 3$ est une somme de 3 termes : a , b et 3 .
- (2) $x - y + z - w$ est une somme de 4 termes : x , $-y$, z et $-w$.
- (3) $a \cdot b + c$ est une somme de 2 termes : $a \cdot b$ et c .

Remarque : Ici on a utilisé la règle de priorité : « *multiplication avant addition* ». L'expression est une somme parce que l'addition est la **dernière** opération à effectuer. De même :

- (4) $2x + 3(a + b) - 1$ est une somme de 3 termes : $2x$, $3(a + b)$ et -1 .

Un **produit** est le *résultat de la multiplication* de deux ou plusieurs **facteurs**.

Exemples :

- (1) $a \cdot b \cdot x$ est un produit de 3 facteurs : a , b et x .
- (2) $\frac{3xy}{2}$ est un produit de 4 facteurs : 3 , x , y et $\frac{1}{2}$.

Remarque : La division par 2 est équivalente à la multiplication par $\frac{1}{2}$.

- (3) $(a + b)(x - 5)$ est un produit de 2 facteurs : $a + b$ et $x - 5$.

Remarque : Ici la règle de priorité disant qu'il faut d'abord effectuer les expressions entre parenthèses a permis de reconnaître le produit. L'expression est un produit parce que la multiplication est la **dernière** opération à effectuer. De même :

- (4) $x^2(2x + 1)$ est un produit de 3 facteurs : 2 facteurs x et le facteur $(2x + 1)$.

Exercice 1

Analyser les expressions suivantes (c.-à-d. examiner s'il s'agit de sommes ou de produits et compter les termes respectivement les facteurs).

- (1) $a \cdot (b + c) \cdot x$
- (2) $a + b \cdot x - c$
- (3) $a \cdot b \cdot c + x$
- (4) $3a + 2b - x - 5y + 7$

$$(5) \quad \frac{x+1}{y}$$

$$(6) \quad (x+y)(x-y)$$

$$(7) \quad (a+2)^2(x-2y)^3$$

$$(8) \quad (a+b)^2 - 2ab - \frac{5}{3a} + 7$$

$$(9) \quad x^2yz + 1$$

$$(10) \quad 1 - x(x+3)(2-x)^2$$

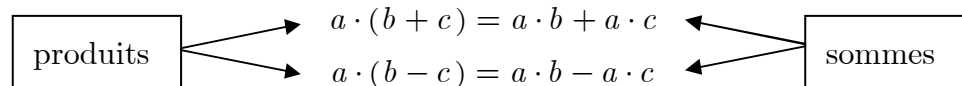
$$(11) \quad 2 + \frac{3}{x} - \frac{y-1}{8}$$

$$(12) \quad \frac{a+b-1}{x(x+3)}$$

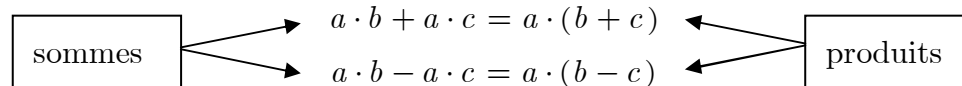
Les trois méthodes de factorisation qu'il faut connaître sont : *la mise en évidence*, les *produits (identités) remarquables* et le *groupement de termes*.

A. La mise en évidence

Rappelons la propriété de *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction :



Cette propriété permet de *développer* (ou *effectuer*) une expression, c.-à-d. de *transformer un produit en une somme*. Lorsqu'on lit les égalités dans l'autre sens, on *transforme une somme en un produit*, c.-à-d. on *factorise* :



On dit qu'on a mis en évidence *le facteur commun a*.

Remarque : On peut également mettre en évidence le signe $-$:

$$-a - b = -(a + b)$$

$$-a + b = -(a - b)$$

$$a - b = -(-a + b)$$

$$a + b = -(-a - b)$$

Si l'on met le $-$ en évidence, les termes changent de signe à l'intérieur des $()$.

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes en mettant en évidence les facteurs communs :

$$(1) \quad xy + ax - x^2 + x$$

$$(2) \quad -12ab^5 + 36b^3 - 48b^4c$$

$$(3) \quad x^3y^4 - x^2y^2 + x^7y^3$$

$$(4) \quad 5(x-4) + a \cdot (x-4)$$

$$(5) \quad 2x(x+3) - (x+3)^2 + (x+3)(x-2)$$

- (6) $-a^2 - 2ab - 3a$
 (7) $-(a+b)^2 - (a+b)(3a-b) + (7-3a)(a+b)$
 (8) $(a-5)(2a+7) + a(5-a)$ (Remarquer qu'il y a des facteurs opposés !)
 (9) $14(3-2a)(x+y) + 4(x-\frac{3}{2}y)(2a-3)$
 (10) $x(3a+6) + y(4a+8) - (a+2)$ (Le facteur commun est bien caché ...)
 (11) $(x^2+x)(2x-3) - (xy+y)(8x+1)$ (Même remarque ...)
 (12) $a^2(a-1)(3a+1) - a(1-a)(15a+5) - (a-1)^2(-12a-4)$
 (13) $a(3x+5)(30y-6) - 18b(6x+10)(1-5y)$
 (14) $5a(a-b)^2(a-2b) - 3(a+b)(a-b)^3$
 (15) $8(x+4)^5 - (2x+8)^4(x-3)$
 (16) $(2-14x)^3 - x(7x-1)^2$

Exercice 3

Mettre en évidence le facteur indiqué en fin de ligne ou le signe $-$ dans les expressions suivantes :

- | | | | | |
|-----|--------------------------|---|---------|---|
| (1) | $3x - 18y + 6$ | ; | 3 | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">facteur à mettre en évidence</div> |
| (2) | $9a + 180$ | ; | 9 | |
| (3) | $a - b$ | ; | $-$ | |
| (4) | $4x + 6y - 2z$ | ; | -2 | |
| (5) | $2x - 5y$ | ; | 2 | |
| (6) | $3a - b - 4c$ | ; | -8 | |
| (7) | $-a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ | ; | $-$ | |
| (8) | $a^2 + 5a + 1$ | ; | a | |
| (9) | $3b^3 - 5b^2 + 4$ | ; | $-3b^2$ | |

B. Les produits remarquables

Rappelons les identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

différence de 2 carrés

Remarques importantes :

- Ne pas confondre $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
et : $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$.
- Une somme de deux carrés $a^2 + b^2$ ne se factorise pas !

Exercice 4

Factorisez à l'aide des identités remarquables. Mettre éventuellement **d'abord** un ou plusieurs facteurs communs en évidence ! Vérifier le double produit si nécessaire.

- (1) $a^2 + c^2 + 2ac$
- (2) $-2xy + x^2 + y^2$
- (3) $9x^2 - 4y^2$
- (4) $4a^4 + 20a^2b^3 + 25b^6$
- (5) $169x^2 - 52xy + 4y^2$
- (6) $a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
- (7) $18a^2 + 2 - 12a$ (Mettre d'abord en évidence ...)
- (8) $-9 - x^2 + 6x$
- (9) $2x^2 - 2y^2$
- (10) $80y + 20 + 80y^2$
- (11) $3z^4 - 48$ (Le résultat doit comporter autant de facteurs que possible ...)
- (12) $a^4x^4 + 1 - 2a^2x^2$
- (13) $72x^2y^2 - 16y^4 - 81x^4$
- (14) $a^4 - 81b^4$
- (15) $-a^{10} + 121y^2$ (Utiliser la commutativité ...)
- (16) $-(x - 2)^2 + (3x + 1)^2$
- (17) $(a - 1)^2 - 2(a - 1)b + b^2$
- (18) $4(a + b)^2 - 25a^2b^2$
- (19) $36(2a + 3b)^2 - 9(a - 5b)^2$
- (20) $5(x + 3)^2 + 10(x + 3)(y - 4) + 5(y - 4)^2$
- (21) $-3x^5 + 12x^4 - 12x^3$
- (22) $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
- (23) $\frac{a^2}{4} + \frac{121}{a^2} - 11$
- (24) $\frac{x^4}{16} - \frac{5x^2z^2}{6} + \frac{25z^4}{9}$
- (25) $\left(\frac{2x}{5} - 1\right)^2 - \frac{1}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

C. Le groupement de termes

La méthodes précédentes ne mènent pas toujours au but dans le travail de factorisation. C'est notamment le cas lorsque les expressions à factoriser contiennent 4 termes ou plus. Dans ce cas il faut très souvent commencer par *grouper astucieusement les termes*. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
 & ax + ay + bx + by \\
 &= (ax + ay) + (bx + by) \quad \leftarrow \text{formation de 2 groupes} \\
 &= a(x + y) + b(x + y) \quad \leftarrow \text{mise en évidence dans les 2 groupes} \\
 &= (x + y)(a + b)
 \end{aligned}$$

On met les termes qui vont ensemble entre parenthèses. Mais attention : *lorsqu'un groupe de termes est précédé du signe $-$* , on met ce $-$ en évidence :

$$\begin{aligned}
 & ax + ay - bx - by \\
 &= (ax + ay) - (bx + by) \\
 &= a(x + y) - b(x + y) \\
 &= (x + y)(a - b)
 \end{aligned}$$

Parfois un groupement prometteur au début ne mène à rien :

$$\begin{aligned}
 & a^2 - a - x^2 + x \\
 &= (a^2 - a) - (x^2 - x) \\
 &= a(a - 1) - x(x - 1) \\
 &= ?
 \end{aligned}$$

Dans ce cas on essaie de grouper différemment :

$$\begin{aligned}
 & a^2 - a - x^2 + x \\
 &= a^2 - x^2 - a + x \quad \leftarrow \text{on commence par changer l'ordre des termes} \\
 &= (a^2 - x^2) - (a - x) \quad \leftarrow \text{formation des groupes} \\
 &= (a - x)(a + x) - (a - x) \\
 &= (a - x)[(a + x) - 1] \quad \leftarrow \text{on effectue et simplifie l'expression entre [].} \\
 &= (a - x)(a + x - 1)
 \end{aligned}$$

Exercice 5

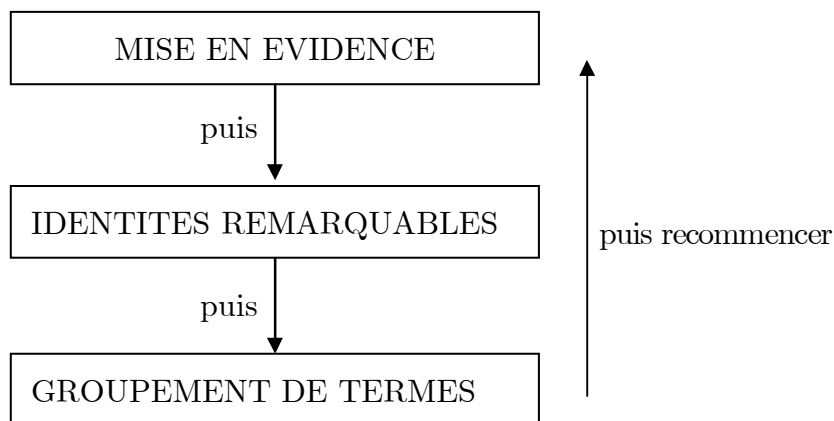
Factorisez en groupant convenablement les termes :

- (1) $3a + 6b - 2bx - ax$
- (2) $2x - 2a + 4 - ax$
- (3) $3x + ax - 3 - 3y - a - ay$ (2 groupes de 3 termes ou 3 groupes de 2 termes)
- (4) $a^2 - 2a - ab - 2x + ax - bx$

- (5) $x^2 - 2xy - 16 + y^2$ (1 groupe de 3 termes et 1 terme seul)
 (6) $1 - a^2 - b^2 + 2ab$
 (7) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd$
 (8) $x^2 - 9 - (3 - x)(x - 2) + x^3 - 3x^2$ (surtout ne pas effectuer ...)
 (9) $4a^2 + 4a^2x - 1 + 4ax + x$ (les termes sont bien mélangés ...)
 (10) $25a^2 - 400 + 160x - 10a^2x - 16x^2 + a^2x^2$

D. Méthodes mélangées

Lorsque l'on factorise une expression, il faut toujours essayer les méthodes précédentes dans l'ordre et cycliquement, c.-à-d.



Si aucune des 3 méthodes n'est fructueuse, il faut parfois commencer par **effectuer** l'expression à factoriser. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 & (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \\
 &= a^2x^2 + \cancel{2abxy} + b^2y^2 + a^2y^2 - \cancel{2abxy} + b^2x^2 \\
 &= a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 \\
 &= (a^2x^2 + a^2y^2) + (b^2x^2 + b^2y^2) \quad (\text{groupement de termes}) \\
 &= a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) \quad (\text{mise en évidence}) \\
 &= (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

Dans d'autres cas il faut utiliser des astuces ingénieuses. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 2x - 3 \\
 &= x^2 + 2x + 1 - 4 \quad (\text{astuce !}) \\
 &= (x^2 + 2x + 1) - 4 \quad (\text{groupement de termes}) \\
 &= (x + 1)^2 - 4 \quad (\text{identité remarquable}) \\
 &= (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) \quad (\text{identité remarquable}) \\
 &= (x - 1)(x + 3)
 \end{aligned}$$

Exercice 6

Factoriser les expression suivantes :

- (1) $3x^2 - 30x + 75 - 3y^2$
- (2) $4ax^4 - 4a^5$
- (3) $2abxy + 1 - a^2x^2 - b^2y^2$
- (4) $(25x^4 - 100x^2y^4) - (4x^2y^4 - 16y^8)$ (les groupes sont déjà faits ...)
- (5) $x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6$
- (6) $(x^2 - 2x)^2 - 1$
- (7) $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$
- (8) $9x^4 - 18x^2 - 36(x - 1)^2 + 9$
- (9) $x^3 + 4x - 5$ (Remarquer que $4x = -x + 5x$, puis grouper ...)

Solutions des exercices

Exercice 1

- (1) $a \cdot (b + c) \cdot x$ est un produit de 3 facteurs.
- (2) $a + b \cdot x - c$ est une somme de 3 termes.
- (3) $a \cdot b \cdot c + x$ est une somme de 2 termes.
- (4) $3a + 2b - x - 5y + 7$ est une somme de 5 termes.
- (5) $\frac{x+1}{y}$ est un produit de 2 facteurs : $x + 1$ et $\frac{1}{y}$.
- (6) $(x + y)(x - y)$ est un produit de 2 facteurs.
- (7) $(a + 2)^2(x - 2y)^3$ est un produit de 5 facteurs.
- (8) $(a + b)^2 - 2ab - \frac{5}{3a} + 7$ est une somme de 4 termes.
- (9) $x^2yz + 1$ est une somme de 2 termes.
- (10) $1 - x(x + 3)(2 - x)^2$ est une somme de 2 termes.
- (11) $2 + \frac{3}{x} - \frac{y-1}{8}$ est une somme de 3 termes.
- (12) $\frac{a+b-1}{x(x+3)}$ est un produit de 3 facteurs (1 facteur au numérateur et 2 au dénominateur).

Exercice 2

- (1) $xy + ax - x^2 + x = x(y + a - x + 1)$
- (2) $-12ab^5 + 36b^3 - 48b^4c = -12b^3(ab^2 - 3 + 4bc)$
ou bien : $= 12b^3(-ab^2 + 3 - 4bc)$
- (3) $x^3y^4 - x^2y^2 + x^7y^3 = x^2y^2(xy^2 - 1 + x^5y)$
- (4) $5(x - 4) + a \cdot (x - 4) = (x - 4)(5 + a)$
- (5) $2x(x + 3) - (x + 3)^2 + (x + 3)(x - 2)$

- $$\begin{aligned}
 &= (x+3)[2x - (x+3) + (x-2)] \\
 &= (x+3)(2x - x - 3 + x - 2) \\
 &= (x+3)(2x - 5) \\
 (6) \quad &-a^2 - 2ab - 3a \\
 &= -a(a + 2b + 3) \\
 (7) \quad &-(a+b)^2 - (a+b)(3a-b) + (7-3a)(a+b) \\
 &= -(a+b)[(a+b) + (3a-b) - (7-3a)] \\
 &= -(a+b)(a+b+3a-b-7+3a) \\
 &= -(a+b)(7a-7) \\
 &= -7(a+b)(a-1) \\
 (8) \quad &(a-5)(2a+7) + a(5-a) \\
 &= (a-5)(2a+7) - a(a-5) \\
 &= (a-5)[(2a+7) - a] \\
 &= (a-5)(a+7) \\
 (9) \quad &14(3-2a)(x+y) + 4\left(x - \frac{3}{2}y\right)(2a-3) \\
 &= 14(3-2a)(x+y) - 2(2x-3y)(3-2a) \\
 &= 2(3-2a)[7(x+y) - (2x-3y)] \\
 &= 2(3-2a)(7x+7y-2x+3y) \\
 &= 2(3-2a)(5x+10y) \\
 &= 10(3-2a)(x+2y) \\
 (10) \quad &x(3a+6) + y(4a+8) - (a+2) \\
 &3x(a+2) + 4y(a+2) - (a+2) \\
 &(a+2)(3x+4y-1) \\
 (11) \quad &(x^2+x)(2x-3) - (xy+y)(8x+1) \\
 &x(x+1)(2x-3) - y(x+1)(8x+1) \\
 &= (x+1)[x(2x-3) - y(8x+1)] \\
 &= (x+1)(2x^2-3x-8xy-y) \\
 (12) \quad &a^2(a-1)(3a+1) - a(1-a)(15a+5) - (a-1)^2(-12a-4) \\
 &= a^2(a-1)(3a+1) + 5a(a-1)(3a+1) + 4(a-1)^2(3a+1) \\
 &= (a-1)(3a+1)[a^2+5a+4(a-1)] \\
 &= (a-1)(3a+1)(a^2+9a-1) \\
 (13) \quad &a(3x+5)(30y-6) - 18b(6x+10)(1-5y) \\
 &= 6a(3x+5)(5y-1) + 36b(3x+5)(5y-1) \\
 &= 6(3x+5)(5y-1)(a+6b) \\
 (14) \quad &5a(a-b)^2(a-2b) - 3(a+b)(a-b)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5a(a-b)^2(a-2b) - 3(a+b)(a-b)^3 \\
 &= (a-b)^2 [5a(a-2b) - 3(a+b)(a-b)] \\
 &= (a-b)^2 [5a^2 - 10ab - 3(a^2 - b^2)] \\
 &= (a-b)^2 (5a^2 - 10ab - 3a^2 + 3b^2) \\
 &= (a-b)^2 (2a^2 - 10ab + 3b^2) \\
 (15) \quad &8(x+4)^5 - (2x+8)^4(x-3) \\
 &= 8(x+4)^5 - [2(x+4)]^4(x-3) \\
 &= 8(x+4)^5 - 16(x+4)^4(x-3) \\
 &= 8(x+4)^4[(x+4) - 2(x-3)] \\
 &= 8(x+4)^4(-x+10) \\
 (16) \quad &(2-14x)^3 - x(7x-1)^2 \\
 &= 8(1-7x)^3 - x(7x-1)^2 \\
 &= 8(1-7x)^3 - x(1-7x)^2 \\
 &= (1-7x)^2 [8(1-7x) - x] \\
 &= (1-7x)^2 (8-56x-x) \\
 &= (1-7x)^2 (8-57x)
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Cet exercice sert à montrer qu'on peut mettre en évidence tout ce qu'on veut !

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &3x - 18y + 6 = 3(x - 6y + 2) \\
 (2) \quad &9a + 180 = 9(a + 20) \\
 (3) \quad &a - b = -(-a + b) = -(b - a) \\
 (4) \quad &4x + 6y - 2z = -2(2x - 3y + z) \\
 (5) \quad &2x - 5y = 2(x - \frac{5}{2}y) \\
 (6) \quad &3a - b - 4c = -8(-\frac{3a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{4c}{8}) = -8(-\frac{3a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{2}) \\
 (7) \quad &-a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = -(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) \\
 (8) \quad &a^2 + 5a + 1 = a(a + 5 + \frac{1}{a}) \\
 (9) \quad &3b^3 - 5b^2 + 4 = -3b^2(-b + \frac{5}{3} - \frac{4}{3b^2})
 \end{aligned}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2 \\
 (2) \quad &-2xy + x^2 + y^2 = (x - y)^2 \\
 (3) \quad &9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y) \\
 (4) \quad &4a^4 + 20a^2b^3 + 25b^6 = (2a^2 + 5b^3)^2
 \end{aligned}$$

N'oubliez jamais de vérifier le double produit !

- (5) $169x^2 - 52xy + 4y^2 = (13x - 2y)^2$
- (6) $a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2$
- (7) $18a^2 + 2 - 12a = 2(9a^2 - 6a + 1) = 2(3a - 1)^2$
- (8) $-9 - x^2 + 6x = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$
- (9) $2x^2 - 2y^2 = 2(x^2 - y^2) = 2(x - y)(x + y)$
- (10) $80y + 20 + 80y^2 = 20(4y + 1 + 4y^2) = 20(2y + 1)^2$
- (11) $3z^4 - 48 = 3(z^4 - 16) = 3(z^2 - 4)(z^2 + 4) = 3(z - 2)(z + 2)(z^2 + 4)$
- (12) $a^4x^4 + 1 - 2a^2x^2$
 $= (a^2x^2)^2 - 2a^2x^2 + 1$
 $= (a^2x^2 - 1)^2$
 $= [(ax - 1)(ax + 1)]^2$
 $= (ax - 1)^2(ax + 1)^2$
- (13) $72x^2y^2 - 16y^4 - 81x^4$
 $= -[(4y^2)^2 - 72x^2y^2 + (9x^2)^2]$
 $= -(4y^2 - 9x^2)^2$
 $= -(2y - 3x)^2(2y + 3x)^2$
- (14) $a^4 - 81b^4$
 $= (a^2 - 9b^2)(a^2 + 9b^2)$
 $= (a - 3b)(a + 3b)(a^2 + 9b^2)$
- (15) $-a^{10} + 121y^2$
 $= 121y^2 - a^{10}$
 $= (11y - a^5)(11y + a^5)$
- (16) $-(x - 2)^2 + (3x + 1)^2$
 $= (3x + 1)^2 - (x - 2)^2$
 $= [(3x + 1) - (x - 2)][(3x + 1) + (x - 2)]$
 $= (2x + 3)(4x - 1)$
- (17) $(a - 1)^2 - 2(a - 1)b + b^2$
 $= [(a - 1) - b]^2 = (a - b - 1)^2$
- (18) $4(a + b)^2 - 25a^2b^2$
 $= [2(a + b) - 5ab][2(a + b) + 5ab]$
 $= (2a + 2b - 5ab)(2a + 2b + 5ab)$
- (19) $36(2a + 3b)^2 - 9(a - 5b)^2$

Une somme de 2 carrés ne se factorise pas.

$$\begin{aligned}
 &= 9[4(2a + 3b)^2 - (a - 5b)^2] \\
 &= 9[2(2a + 3b) - (a - 5b)][2(2a + 3b) + (a - 5b)] \\
 &= 9(3a + 11b)(5a + b) \\
 (20) \quad &5(x + 3)^2 + 10(x + 3)(y - 4) + 5(y - 4)^2 \\
 &= 5[(x + 3)^2 + 2(x + 3)(y - 4) + (y - 4)^2] \\
 &= 5[(x + 3) + (y - 4)]^2 \\
 &= 5(x + y - 1)^2 \\
 (21) \quad &-3x^5 + 12x^4 - 12x^3 \\
 &= -3x^5 + 12x^4 - 12x^3 \\
 &= -3x^3(x^2 - 4x + 4) \\
 &= -3x^3(x - 2)^2 \\
 (22) \quad &\frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 \\
 (23) \quad &\frac{a^2}{4} + \frac{121}{a^2} + 11 = \left(\frac{a}{2} - \frac{11}{a}\right)^2 \\
 (24) \quad &\frac{x^4}{16} - \frac{5x^2z^2}{6} + \frac{25z^4}{9} = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{5z^2}{3} + \left(\frac{5z^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{5z^2}{3}\right)^2 \\
 (25) \quad &\left(\frac{2x}{5} - 1\right)^2 - \frac{1}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \left[\left(\frac{2x}{5} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{2x}{5} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= \left(\frac{2x}{5} - 1 - \frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{2x}{5} - 1 + \frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right) \\
 &= \left(\frac{x}{15} - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{11x}{15} - \frac{5}{6}\right)
 \end{aligned}$$

Exercise 5

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &3a + 6b - 2bx - ax \\
 &= (3a + 6b) - (2bx + ax) \\
 &= 3(a + 2b) - x(2b + a) \\
 &= (a + 2b)(3 - x) \\
 (2) \quad &2x - 2a + 4 - ax \\
 &= (2x + 4) - (2a + ax) \\
 &= 2(x + 2) - a(2 + x) \\
 &= (x + 2)(2 - a)
 \end{aligned}$$

- (3) $3x + ax - 3 - 3y - a - ay$
 $= (3x + ax) - (3 + a) - (3y + ay)$
 $= x(3 + a) - (3 + a) - y(3 + a)$
 $= (3 + a)(x - 1 - y)$
 $= (3 + a)(x - y - 1)$
- (4) $a^2 - 2a - ab - 2x + ax - bx$
 $= (a^2 - ab - 2a) + (ax - bx - 2x)$
 $= a(a - b - 2) + x(a - b - 2)$
 $= (a - b - 2)(a + x)$
- (5) $x^2 - 2xy - 16 + y^2$
 $= (x^2 - 2xy + y^2) - 16$
 $= (x - y)^2 - 16$
 $= (x - y)^2 - 4^2$
 $= (x - y - 4)(x - y + 4)$
- (6) $1 - a^2 - b^2 + 2ab$
 $= 1 - (a^2 + b^2 - 2ab)$
 $= 1 - (a - b)^2$
 $= (1 - a + b)(1 + a - b)$
- (7) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd$
 $= (a^2 + b^2 - 2ab) - (c^2 + d^2 - 2cd)$
 $= (a - b)^2 - (c - d)^2$
 $= (a - b - c + d)(a - b + c - d)$
- (8) $x^2 - 9 - (3 - x)(x - 2) + x^3 - 3x^2$
 $= (x - 3)(x + 3) + (x - 3)(x - 2) + x^2(x - 3)$
 $= (x - 3)(x^2 + 2x + 1)$
 $= (x - 3)(x + 1)^2$
- (9) $4a^2 + 4a^2x - 1 + 4ax + x$
 $= (4a^2 - 1) + (4a^2x + 4ax + x)$
 $= (2a - 1)(2a + 1) + x(4a^2 + 4a + 1)$
 $= (2a - 1)(2a + 1) + x(2a + 1)^2$
 $= (2a + 1)[(2a - 1) + x(2a + 1)]$
 $= (2a + 1)(2a - 1 + 2ax + x)$
- (10) $25a^2 - 400 + 160x - 10a^2x - 16x^2 + a^2x^2$

$$\begin{aligned}
 &= (25a^2 - 400) + (160x - 10a^2x) + (a^2x^2 - 16x^2) \\
 &= 25(a^2 - 16) + 10x(16 - a^2) + x^2(a^2 - 16) \\
 &= 25(a^2 - 16) - 10x(a^2 - 16) + x^2(a^2 - 16) \\
 &= (a^2 - 16)(25 - 10x + x^2) \\
 &= (a - 4)(a + 4)(5 - x)^2
 \end{aligned}$$

Exercice 6

- (1) $3x^2 - 30x + 75 - 3y^2$
 $= 3[(x^2 - 10x + 25) - y^2]$
 $= 3[(x - 5)^2 - y^2]$
 $= 3(x - 5 - y)(x - 5 + y)$
- (2) $4ax^4 - 4a^5$
 $= 4a(x^4 - a^4)$
 $= 4a(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$
 $= 4a(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$
- (3) $2abxy + 1 - a^2x^2 - b^2y^2$
 $= 1 + 2abxy - a^2x^2 - b^2y^2$
 $= 1 - (a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy)$
 $= 1 - (ax - by)^2$
 $= (1 - ax + by)(1 + ax - by)$
- (4) $(25x^4 - 100x^2y^4) - (4x^2y^4 - 16y^8)$
 $= 25x^2(x^2 - 4y^4) - 4y^4(x^2 - 4y^4)$
 $= (x^2 - 4y^4)(25x^2 - 4y^2)$
 $= (x - 2y^2)(x + 2y^2)(5x - 2y)(5x + 2y)$
- (5) $x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6$
 $= (x^6 - x^4y^2) - (x^2y^4 - y^6)$
 $= x^4(x^2 - y^2) - y^4(x^2 - y^2)$
 $= (x^2 - y^2)(x^4 - y^4)$
 $= (x^2 - y^2)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$
 $= (x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)$
- (6) $(x^2 - 2x)^2 - 1$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 2x)^2 - 1 \\ &= (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x^2 - 2x - 1)(x - 1)^2 \\ (7) \quad &a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 \\ &= (a^4 - b^4) + (2a^3b - 2ab^3) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) + 2ab(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) \\ &= (a - b)(a + b)(a + b)^2 \\ &= (a - b)(a + b)^3 \\ (8) \quad &9x^4 - 18x^2 - 36(x - 1)^2 + 9 \\ &= 9x^4 - 18x^2 + 9 - 36(x - 1)^2 \\ &= 9[(x^4 - 2x^2 + 1) - 4(x - 1)^2] \\ &= 9[(x^2 - 1)^2 - 4(x - 1)^2] \\ &= 9[(x - 1)^2(x + 1)^2 - 4(x - 1)^2] \\ &= 9(x - 1)^2[(x + 1)^2 - 4] \\ &= 9(x - 1)^2(x + 1 - 2)(x + 1 + 2) \\ &= 9(x - 1)^2(x - 1)(x + 3) \\ (9) \quad &x^3 + 4x - 5 \\ &= x^3 - x + 5x - 5 \\ &= x(x^2 - 1) + 5(x - 1) \\ &= x(x - 1)(x + 1) + 5(x - 1) \\ &= (x - 1)(x(x + 1) + 5) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 5) \end{aligned}$$