

Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

1) Ensembles de nombres.

a) L'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$,

b) L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{Z}$ privé de 0) ;

c) L'ensemble des décimaux. $\mathbb{D}$

L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres

Dits "à virgule". Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$.

$$D = \left\{ a \times 10^{-n} = \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \right\}$$

d) L'ensemble des rationnels. $\mathbb{Q}$: Les nombres rationnels

sont les fractions de la forme p/q : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^* \right\}$

e) L'ensemble des réels. $\mathbb{R}$: Tous les nombres utilisés en Seconde sont des réels. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro)

$\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

2) opérations et règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels :

$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

$a + b = b + a$; $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

$-a$ L'opposé de a

$(-a) + a = a + (-a) = 0$ et $a + 0 = 0 + a = a$

$a - b = a + (-b)$ et $-(a - b) = -a + b$

$a \times b = b \times a = ab = ba$ et $a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc$

Si : $a \neq 0$; $a \times \frac{1}{a} = 1$ $\frac{1}{a}$ l'inverse de a et $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

$k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$

$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $k \times \frac{a}{b} = \frac{ak}{b}$

$\frac{a}{b} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$; $bc \neq 0$ et $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Si on a : $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$ alors $a + c = b + d$

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

$\frac{a}{b} = 0$ ssi $a = 0$

3) Racine carrée : a) a est un nombre positif. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est Égal à a .

b) soient a et b deux nombres positifs ou nuls

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; b > 0$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$a \in \mathbb{R}^+ : x^2 = a \text{ si et seulement si } x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

4) Les Puissances : a) : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Le produit de n facteurs égaux à a et noté a^n et s'appelle la puissance $n^{\text{ième}}$ de a ; n est appelé exposant

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ Cas particulier : } a^1 = a; a^0 = 1$$

et on a : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ En particulier : Pour $a \neq 0$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_n; n \in \mathbb{N} \text{ (n zéros)}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,000 \dots 01}_n; n \in \mathbb{N} \text{ (n zéros)}$$

$$10^1 = 10 ; 10^{-1} = 0,1 ; 10^{-2} = 0,01 ; 10^0 = 1$$

b) Propriétés des puissances : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$ et

$$n \in \mathbb{N}^* ; m \in \mathbb{N}^* \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad a^n \times b^n = (ab)^n ;$$

$$(a^n)^m = a^{nm} ; a^n \times a^m = a^{n+m} ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

4) Écriture scientifique d'un nombre décimal

La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ($1 \leq a < 10$) et p un nombre entier relatif.

5) Identités remarquables : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad 4) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$5) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ Somme de deux cubes}$$

$$6) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ Cube d'une Somme}$$

$$7) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ Cube d'une différence}$$

Ces formules sont pour développer et pour factoriser
Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.



Factoriser c'est écrire sous la forme d'un produit