

ch. 2 : Les ensembles des nombres

1. Les nombres entiers

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers naturels non nuls

$\mathbb{Z} = \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers (relatifs)

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers (relatifs) non nuls

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers relatifs positifs

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$ = ensemble des entiers relatifs négatifs

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ = ensemble des entiers relatifs strictement positifs

$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$ = ensemble des entiers relatifs strictement négatifs

Remarques.

- 0 est à la fois positif et négatif. C'est le seul nombre qui jouit de cette propriété.

$$\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\} \quad (1.1)$$

- Les entiers (relatifs) sont munis du signe + ou du signe -. On a :

$$\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

- L'ensemble des entiers relatifs positifs est égal à l'ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \quad (1.3)$$

- L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

- On veillera à ne pas confondre les termes de **chiffre** et d'**entier** : seuls les dix entiers 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9 sont appelés **chiffres**. 12 est donc un nombre entier, mais pas un chiffre.

2. Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'un nombre fini de chiffres derrière la virgule. Par exemple : 123,45 et -5,004 sont des nombres décimaux, mais $1/3 = 0,33333\dots$ n'est pas un nombre décimal car dans son développement décimal il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. Pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux, remarquons que :

$$123,45 = \frac{12345}{100} = \frac{12345}{10^2} \quad \text{et} \quad -5,004 = \frac{-5004}{1000} = \frac{-5004}{10^3}$$

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \text{ est l'ensemble des nombres décimaux}$$

$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux non nuls

$\mathbb{D}_+ = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux positifs

$\mathbb{D}_- = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}_-, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux négatifs

Exemples.

- $\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$
- $-\frac{3}{200} = -\frac{15}{1000} = -\frac{15}{10^3} \in \mathbb{D}$
- $9 = \frac{9}{1} = \frac{9}{10^0} \in \mathbb{D}$

Remarques.

- Le dernier exemple ci-dessus est important car il montre que tout entier est aussi un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors :

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} \in \mathbb{D}$$

car le numérateur $a \in \mathbb{Z}$ et le dénominateur est 10^0 avec l'exposant $0 \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \quad (1.5)$$

- Un nombre décimal peut toujours s'écrire avec un nombre fini de chiffres non nuls derrière la virgule.

3. Les nombres rationnels

On a vu que $1/3$ n'est pas un nombre décimal puisque dans son développement décimal, il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. On va donc agrandir l'ensemble des nombres rencontrés jusqu'à présent par les **nombres rationnels** (du latin : ratio = fraction). Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'une **fraction à numérateur et dénominateur entiers**. $1/3$ est donc un nombre rationnel.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels

Exemples.

- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{-315}{29} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1998}{-1997} \in \mathbb{Q}$
- $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \in \mathbb{Q}$
- $-0,375 = -\frac{375}{1000} = -\frac{3}{8} \in \mathbb{Q}$

Remarques.

- Les deux derniers exemples montrent que tout décimal est aussi un nombre rationnel. En effet, si $x \in \mathbb{D}$, alors on sait que x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{n}{10^m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $10^m \in \mathbb{N}^*$; donc x peut être représenté par une fraction à numérateur et dénominateur entiers, i.e. $x \in \mathbb{Q}$.

Donc :
$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \quad (1.6)$$

- Tout nombre rationnel peut être écrit soit sous forme d'une fraction (**forme fractionnaire**) soit sous forme d'un **développement décimal**, par exemple :

$\frac{1}{4}$ est une fraction et 0,25 est son développement décimal.

$\frac{5}{9}$ est une fraction et 0,555... est son développement décimal.

Attention : Tous les nombres rationnels admettent un développement décimal, mais ce ne sont pas tous des nombres décimaux. Par exemple : $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal mais $\frac{5}{9}$ n'est pas un nombre décimal. Rappelez pourquoi ?

- Tout nombre rationnel admet une **infinité de représentants**, par exemple : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ sont tous des représentants du même nombre rationnel $\frac{1}{3}$. Le **représentant privilégié** est la fraction $\frac{1}{3}$ car elle est **irréductible**. Rappelons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ est irréductible si et seulement si a et b n'ont pas de diviseur commun (sauf 1), i.e. $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Considérons maintenant le développement décimal de quelques nombre rationnels :

- $\frac{1}{9} = 0,11111... = 0,\overline{1}$
- $\frac{1}{6} = 0,16666... = 0,1\overline{6}$
- $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857... = 0,142857\overline{}$
- $\frac{1}{101} = 0,118811881188... = 0,1188\overline{}$

On observe dans tous les développements décimaux des suites de chiffres qui se répètent indéfiniment. Ce phénomène est général pour les nombres rationnels, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 1. Dans le développement décimal de tout nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment, appelée **période** de ce nombre rationnel.

Démonstration. Admise.

Exemples. La période de $\frac{1}{3}$ est 3, celle de $\frac{1}{6}$ est 6, celle de $\frac{1}{7}$ est 142857 etc. Quelle est la période de $\frac{1}{4}$? Quelle est la période d'un nombre décimal ?

4. Les nombres réels

Il est facile d'inventer des nombres non rationnels, i.e. des nombres dont le développement décimal n'est pas périodique.

Exemples.

- $x = 1,01001000100001000001...$
- $y = 0,123456789101112131415...$ (nombre de Champernowne)

On dit que ces nombres sont **irrationnels**. Il existe encore beaucoup d'autres nombres irrationnels comme par exemple :

$$\pi = 3,1415926535897932385...,$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356...,$$

$$e = 2,71828182845... \text{ (nombre de Napier) } ...$$

En fait, on peut démontrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels. Les nombres rationnels, ensemble avec les nombres irrationnels forment l'ensemble de tous les nombres, appelés **nombres réels**. Retenons :

$\mathbb{R}$ = ensemble de tous les nombres
 = ensemble des nombres réels
 = ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels

$\mathbb{R}^*$ = ensemble des nombres réels non nuls

$\mathbb{R}_+$ = ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{R}_-$ = ensemble des nombres réels négatifs

$\mathbb{I}$ = ensemble des nombres irrationnels

Comme $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres, il est évident que :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \quad (1.7)$$

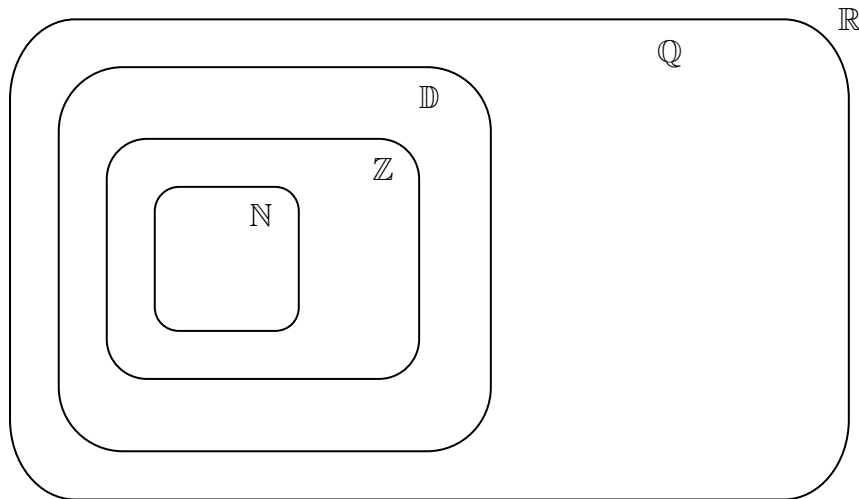
Plus précisément :

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset \quad (1.8)$$

Résumons finalement les relations (1.4) à (1.7) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad (1.9)$$

Voici un diagramme de Venn avec tous les ensembles de nombres :



5. Regles de calcul :

1. Les fractions :

Proprietes :

Soient a,b,c,d quatres nombres reels tels que $b \neq 0$; $d \neq 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd}. & \bullet \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}. \\ \bullet \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad-bc}{bd}. & \bullet \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

2. Les racines carrees :

Definition:

Soit x un nombre reel positif, la **racine carree** de x est le nombre positif dont le carre est egal à x.

Ce nombre est noté : $\sqrt{x}$.

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

Propriétés :

- Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \geq 0$ $b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Si $a \geq 0$ $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque :

- $3 - \sqrt{5}$ s'appelle **la quantité conjuguée** de l'expression $3 + \sqrt{5}$.

3. Les puissances :

Définition:

$$\bullet a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Propriétés :

- Si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$. • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. • $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n \times b^n$.
- Si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

6. Identités remarquables

Pour tous réels a et b , on a :

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
--	--	--

7. Puissances de 10

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

8. Écriture scientifique

Écrire un nombre en écriture scientifique c'est l'exprimer sous la forme :

$$\boxed{\overbrace{a}^{\text{Nombre entre 1 et 10 exclu}}} \times 10^n$$

Pour les nombres supérieurs à 1 (en valeur absolue), l'exposant n sera <u>positif</u> .	Pour les nombres inférieurs à 1 (en valeur absolue), l'exposant n sera <u>négatif</u> .
$9,5 = 9,5 \times 10^0$ $50,7 = 5,07 \times 10^1$ $1\,000 = 1 \times 10^3$ $1\,234 = 1,234 \times 10^3$ $-25,1 = -2,51 \times 10^1$ $\frac{5}{2} = 2,5 = 2,5 \times 10^0$	$0,5 = 5 \times 10^{-1}$ $0,02 = 2 \times 10^{-2}$ $0,0123 = 1,23 \times 10^{-2}$ $0,000\,15 = 1,5 \times 10^{-4}$ $-0,7 = -7 \times 10^{-1}$ $\frac{1}{4} = 0,25 = 2,5 \times 10^{-1}$