



I. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

a. Les nombres entiers :

❖ Ensemble : $\mathbb{N}$

Les nombres entiers naturels forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers naturels on le note $\mathbb{N}$.

- On écrit : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ on dit que $\mathbb{N}$ est écrit en extension.
- L'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\}$ est noté $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

❖ Ensemble $\mathbb{Z}$

Les nombres entiers relatifs forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers relatifs on le note $\mathbb{Z}$.

- On écrit : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ on dit que $\mathbb{Z}$ est écrit en extension.
- L'ensemble $\{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ est noté $\mathbb{Z}^*$. on a $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers positifs, on note $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. on a $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$ (ou encore $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)
- L'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs, on note $\mathbb{Z}^{++} = \mathbb{N}^*$.
- L'ensemble $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers négatifs, on note $\mathbb{Z}^-$. on a $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\{-1, -2, -3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs, on note $\mathbb{Z}^{--}$.
- Remarque :**
 - ✓ les chiffres sont : 0 et 1 et 2 et 3 et 4 et 5 et 6 et 7 et 8 et 9.
 - ✓ les nombres sont : 0 et 1 et 2 et 3 et 4 et 5 et 6 et 7 et 8 et 9 et 10 et 11 et 12
 - ✓ $\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}$

b. Les nombres décimaux :

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire par un nombre fini de chiffres après la virgule. par exemple -15,237 et 0,21 et $\frac{3}{4} = 0.75$ sont des nombres décimaux ; mais

$\frac{2}{3} = 0,666666\dots$ n'est pas un nombre décimal. pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux.

On Remarque : $-15,237 = -\frac{15237}{1000} = -\frac{15237}{10^3}$ et $0,21 = \frac{21}{100} = \frac{21}{10^2}$.

❖ D'où : Les nombres décimaux forment un ensemble appelé ensemble des nombres décimaux on le note $\mathbb{D}$. Avec : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

❖ Remarque :

$$17 = \frac{17}{10^0} \in \mathbb{D} \text{ et } -5 = \frac{-5}{10^0} \in \mathbb{D} \text{ d'où : } \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{D}.$$



c. Les nombres rationnels :

On a : $\frac{2}{3} = 0,666666... \notin \mathbb{D}$. $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel (du latin ratio= fraction) . chaque nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b sont des entiers (avec $b \neq 0$ on préfère $b > 0$) . on note l'ensemble des nombres rationnels par $\mathbb{Q}$

Remarque :

- ✓ On a de même $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^-$.
- ✓ $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$. $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$.
- ✓ Tout nombre rationnel admet une infinité de représentants par exemple :
 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = \frac{-3}{-4}$ le représentant privilégié est la fraction irréductible $\frac{3}{4}$.
- ✓ $\frac{3}{4}$ est une fraction et 0,75 est son développement décimal .
- ✓ Considérons les développement décimal de quelques nombre rationnels :
 - $\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,\bar{3}$. $\frac{1}{11} = 0,090909... = 0,\overline{09}$. $\frac{47}{37} = 1,270270270... = 1,\overline{270}$.
 - $\frac{7}{101} = 0,069306930693... = 0,\overline{0693}$. $\frac{47}{41} = 1,146341463414634... = 1,\overline{14634}$.

❖ Théorème :

Dans le développement décimal de tout nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment , appelle période de ce nombre rationnel .

d. Les nombres réels :

Exemples :

$\sqrt{2} \approx 1,41421356... \cdot \pi \approx 3,141592653589... \cdot$ Sont des nombres irrationnels .

- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment un ensemble appelé ensemble des nombres reels on note cet ensemble par : $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls .
- $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs .
- $\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls .
- $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs .
- $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$

II. Règles de calculs:

a. Pour les fractions :

Soient a et b et c et d des nombres réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{ad} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{ad} .$$



$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

b. Les racines carrées :

❖ Définition :

La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif a dont $a^2 = x$ le nombre a est noté $a = \sqrt{x}$ (càd $\sqrt{a^2} = x$).

c. Identités remarquables :

a et b sont des nombres reels.

$(a+b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \times b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$(a-b)^2 = a^2 - 2a \times b + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 \times b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$		

d. Puissances de 10 :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}} = \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

e. Ecriture scientifique :

Ecrire un nombre b en écriture scientifique c'est de l'écrire sous la forme :

$$b = \underbrace{a}_{\text{nombre entre 1 et 10 exclu}} \times 10^n$$

$ b \leq 1$ ($-1 \leq b \leq 1$) n est positif	$ b > 1$ ($-1 < b$ ou $b > 1$) n est négatif
$b = 5,4 = 5,4 \times 10^0$	$b = -0,4 = 4 \times 10^{-1}$
$b = 47,3 = 4,73 \times 10^1$	$b = 0,043 = 4,3 \times 10^{-2}$
$b = -5110 = -5,11 \times 10^3$	$b = -0,00757 = 7,57 \times 10^{-3}$
$b = 59,4 = 5,94 \times 10^1$	$b = -\frac{2}{5} = -0,4 = 4 \times 10^{-1}$
$b = \frac{7}{4} = 1,75 = 1,75 \times 10^0$	$b = -0,00009999 = 9,999 \times 10^{-5}$