الميكانيك

ذ. هشام محجر

توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

Equilibre d'un corps solide pouvant tourner autour d'un axe fixe

الدرس

بسم الله الرحمن الرحيم
السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

الجذع المشترك
الفيزياء
جزء الميكانيك

توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

Equilibre d'un corps solide pouvant tourner autour d'un axe fixe

المحور الثالث : توازن جسم صلب

الوحدة 7

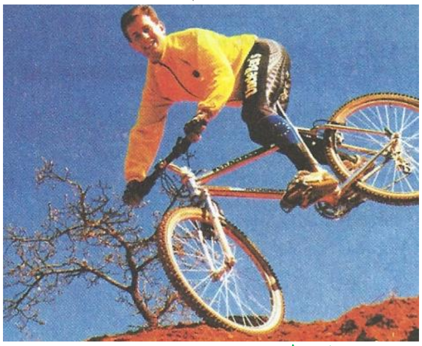
5 س

1- مفعول قوة على دوران جسم صلب :

1-1- تذكير :

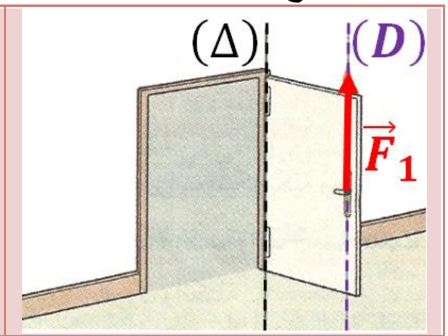
يكون جسم صلب في دوران حول محور ثابت إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركزة في محور الدوران (Δ) ، ما عدا النقط التي تنتمي إلى محور الدوران (Δ) .

أمثلة لبعض الأجسام القابلة للدوران حول محور ثابت (Δ) من حياتنا اليومية :

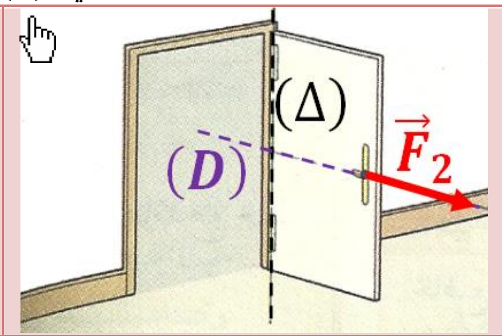


2-1- نشاط :

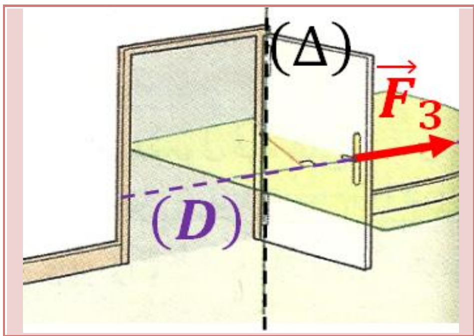
لفتح أو غلق الباب نطبق قوة $\vec{F}$ فيدور الباب حول المحور الرأسي (Δ) المار من المفصلات .



لا يتحرك الباب



لا يتحرك الباب



يتحرك الباب

أ- ما القوة التي تمكن من إدارة الباب حول المحور (Δ) ؟

القوة التي تمكن من إدارة الباب حول المحور (Δ) **هي القوة** $\vec{F}_3$.

ب- ما الشرط الذي يجب أن يستوفيه خط تأثير القوة لكي يكون لها مفعول على دوران الباب ؟

يكون للقوة مفعول دوراني عندما يكون خط تأثيرها غير مواز لمحور الدوران (Δ) ولا يتقاطع معه .

ج- كيف تتغير شدة القوة كلما اقتربنا من محور الدوران (Δ) لفتح أو غلق الباب ؟

تزداد شدة القوة كلما اقتربنا من محور الدوران (Δ) .

3-1- خلاصة :

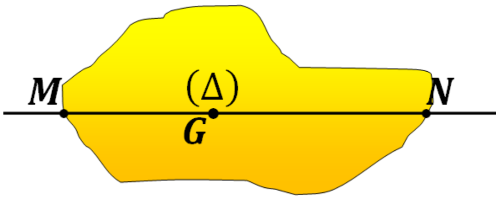
يكون لقوة $\vec{F}$ **مفعول دوران** على جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت (Δ) ، إذا كان **خط تأثيرها غير مواز لمحور الدوران (Δ) ولا يتقاطع معه** .

تزداد شدة القوة التي نختارها لإدارة جسم صلب كلما **اقتربنا من محور الدوران (Δ)** .

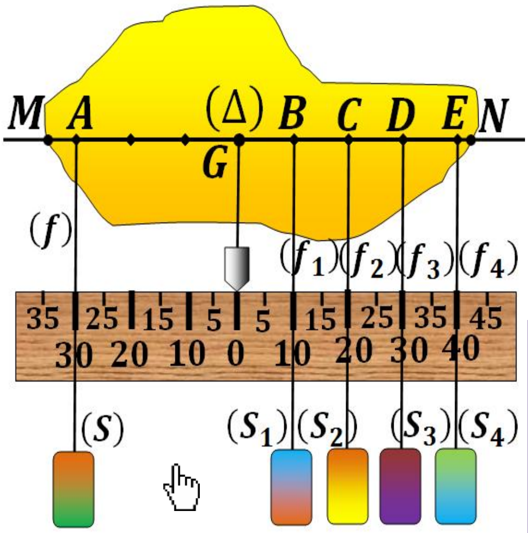
نميز المفعول الدوراني للقوة $\vec{F}$ بمقدار فيزيائي نسميه **عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمحور (Δ)** ونرمز له بـ $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$.

2- عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت :

2-1- نشاط :



نعتبر جسما صلبا قابلا للدوران حول محور ثابت (Δ) يمر من مركز ثقله G . نهمل الاحتكاكات بين الجسم الصلب والمحور (Δ) .
نعلم موضع توازن الجسم الصلب بالمستقيم الأفقي (MN) .

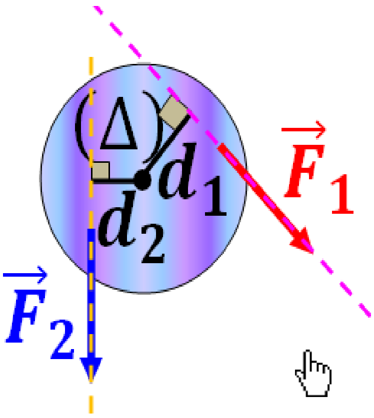


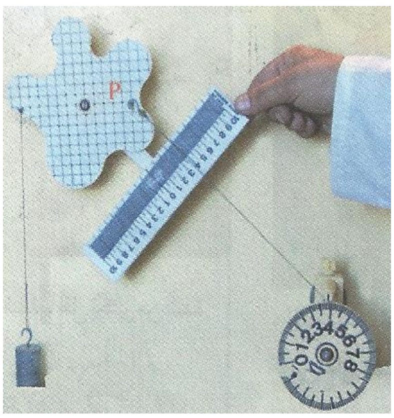
نعلق في النقطة جسما (S) كتلته $m = 100\ g$ بواسطة خيط (f) فيختل توازن الجسم الصلب .
نحقق التوازن البدئي ، بتعليق أجسام مختلفة (S_i) في نقط مختلفة كما هو مبين في الشكل جانبه .
لتكن $\vec{F_i}$ توتر الخيط (f_i) المطبقة على الجسم الصلب و d_i المسافة التي تفصل خط تأثيرها عن المحور (Δ) .
ندون النتائج في الجدول التالي :

النقطة	B	C	D	E
$m_i(g)$	300	150	100	75
$F_i(N)$	3	1,5	1	0,75
$d_i(cm)$	10	20	30	40
$F_i.d_i(N.m)$	0,3	0,3	0,3	0,3

أ- اجرد القوى المطبقة على الجسم الصلب قبل تعليق أي جسم (S) ، هل لهذه القوى مفعول دوراني على الجسم الصلب ؟ علل جوابك .
المجموعة المدروسة : { الجسم الصلب } .
جرد القوى : $\vec{P}$ وزنه و $\vec{R}$ تأثير المحور (Δ) .
القوتان $\vec{P}$ و $\vec{R}$ ليس لهما مفعول دوراني على الجسم الصلب لأن خطي تأثيريهما يتقاطعان مع المحور (Δ) .
ب- عند تحقيق التوازن البدئي ، اجرد القوى المطبقة على الجسم (S_i) ، وحدد العلاقة بين F_i شدة توتر الخيط (f_i) و (m_i) كتلة الجسم (S_i) .
المجموعة المدروسة : { الجسم الصلب (S_i) } .
جرد القوى : $\vec{P}$ وزنه و $\vec{F_i}$ توتر الخيط (f_i) .
لدينا الجسم (S_i) في توازن ، إذن $\sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{F_i} = \vec{0}$ أي $\vec{F_i} = -\vec{P}$
وبالتالي : $F_i = P = m.g$
ج- أتمم ملأ الجدول . ماذا تستنتج ؟ نعطي $g = 10\ N.kg^{-1}$.
انظر أعلاه . نستنتج أن الجذاء $F_i.d_i$ يبقى ثابتا كلما حرصنا على إعادة الجسم الصلب إلى موضع توازنه البدئي .

2-2- خلاصة :



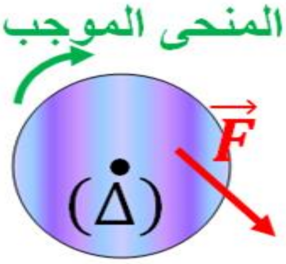


عزم قوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور دوران ثابت (Δ) ومتعامد مع خط تأثيرها ، هو جذاء الشدة F لهذه القوة و المسافة d الفاصلة بين خط تأثيرها والمحور (Δ) حيث :

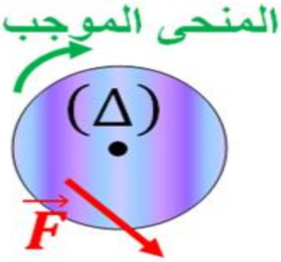
$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F.d$$

وحدته في (ن ع) هي $N.m$.

العزم مقدار جبري :



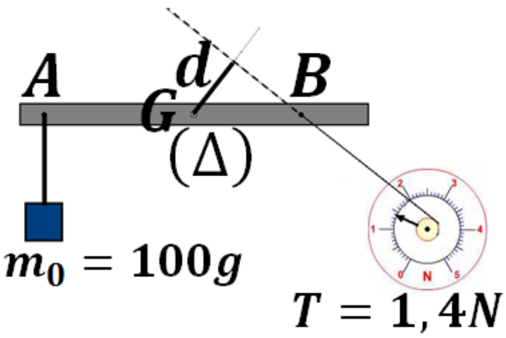
إذا أحدثت القوة $\vec{F}$ دوران الجسم الصلب في المنحى الموجب فإن عزمها يعتبر **موجبا** ونكتب: $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = F.d$.



إذا أحدثت القوة $\vec{F}$ دوران الجسم الصلب في المنحى المعاكس للمنحى الموجب فإن عزمها يعتبر **سالبا** ونكتب: $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = -F.d$.

3- توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت :

3-1- نشاط :



نعتبر ساق متجانسة طولها $L = 30\ cm$ وكتلتها $m = 120\ g$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور ثابت (Δ) يمر من مركز قصورها G . توجد الساق في توازن تحت تأثير مجموعة من القوى .

لدينا: $d_0 = GA = 14\ cm$ و $d = 10\ cm$.

نعطي: $g = 10\ N.kg^{-1}$.

أ- اجرد القوى المطبقة على الساق .

المجموعة المدروسة : { الساق } .

جرد القوى: $\vec{P}$ وزنها و $\vec{R}$ تأثير المحور (Δ) و $\vec{T}$ توتر الدينامومتر و $\vec{T_0}$ توتر الخيط.

ب- احسب عزم كل قوة بحيث المنحى الموجب هو المنحى الموافق لمنحى عقارب الساعة .

لدينا $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن خطي تأثيري $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) .

لدينا $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = T.d = 1,4 \times 0,1 = 0,14N.m$

و $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T_0}) = -T_0.d_0 = -m_0.g.d_0 = -0,1 \times 10 \times 0,14 = -0,14N.m$

د- احسب المجموع الجبري لعزوم كل القوى المطبقة على الساق .

لدينا $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T_0}) = 0 + 0 + 0,14 - 0,14 = 0$.

3-2- نص مبرهنة العزوم :

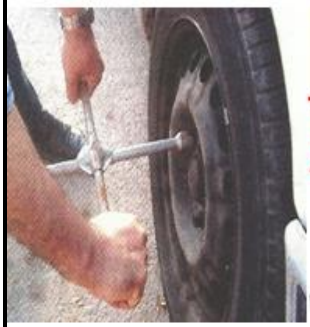
عند توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت (Δ) أياً كان ، فإن **المجموع الجبري لعزوم** كل القوى المطبقة عليه بالنسبة لهذا المحور **منعدم** . $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$

3-3- شرطا توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت :

عندما يكون جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت (Δ) في **توازن** بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض تحت تأثير عدة قوى ، فإن:

- **المجموع المتجهي للقوى المطبقة على الجسم منعدم** $\sum \vec{F} = \vec{0}$. و هذا الشرط لازم لسكون مركز قصوره G .
- **المجموع الجبري لعزوم** كل القوى المطبقة عليه بالنسبة لهذا المحور **منعدم** $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$. و هذا الشرط لازم لغياب الدوران حول المحور (Δ) .

هذان **الشرطان لازمان** لتوازن الجسم الصلب **لكنهما غير كافيين** .



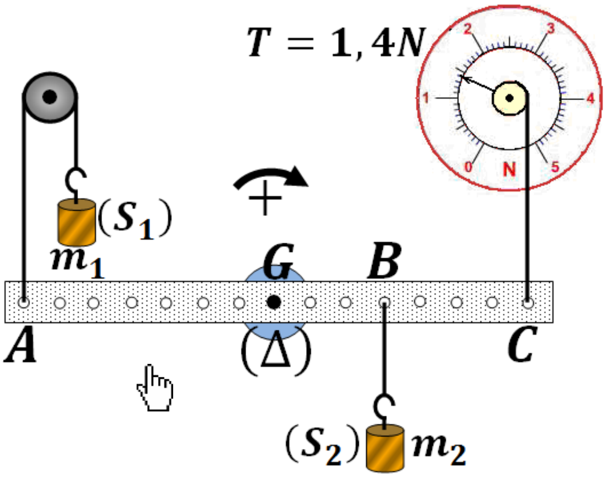
4- عزم مزدوجة قوتين :

4-1- تعريف :

تُكَون القوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ **مزدوجة قوتين** قادرة على إدارة جسم صلب في نفس المنحى ، إذا كان :

- **مجموعهما المتجهي منعدم** $\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.
- **ليس لهما نفس خط التأثير .**

4-2- نشاط :



ننجز التركيب التجريبي المبين جانبه :

نعتبر ساق متجانسة كتلتها $m = 120\ g$ ، قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور ثابت (Δ) ، يمر من مركز ثقلها G . نطبق على الساق مزدوجة قوتين ، بواسطة جسمين صلبين (S_1) و (S_2) لهما نفس الكتلة $m_1 = m_2 = 100\ g$. لإبقاء الساق في حالة توازن أفقي ، نثبت في نقطة C رأسيا دينامومترا (D) ثم نقيس الشدة T التي يشير إليها .

لدينا : $d_1 = GA = 14cm$ و $d_2 = GB = 5cm$

نعطي : $d_0 = GC = 14cm$ و $g = 10N.kg^{-1}$.

أ- اجرد القوى المطبقة على الساق .

المجموعة المدروسة : { الساق } .

جرد القوى : $\vec{P}$ وزنها و $\vec{R}$ تأثير المحور (Δ) و $\vec{T}$ توتر الدينامومتر و $\vec{F}_1$ توتر الخيط في النقطة B و $\vec{F}_2$ توتر الخيط في النقطة A .

ب- قارن مميزات القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ المطبقتين من طرف الخيطين على الساق . ماذا تستنتج ؟

القوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ لهما نفس الاتجاه وليس لهما نفس خط التأثير ومنحيان متعاكسين ونفس الشدة لأن الجسمين (S_1) و (S_2) لهما نفس الكتلة . إذن القوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ تشكلان مزدوجة قوتين .

ج- اعط تعبير عزم كل من القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

لدينا $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) = F_1.d_1$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = F_2.d_2$.

د- نضع عزم مزدوجة القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ هو $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2)$. عبر عن $\mathcal{M}_C$ بدلالة F الشدة المشتركة للقوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و d المسافة الفاصلة بين خطي تأثيري القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

لدينا القوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ لهما نفس الشدة أي $F = F_1 = F_2$ و $d = d_1 + d_2$

إذن $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = F_1.d_1 + F_2.d_2 = F.(d_1 + d_2) = F.d$

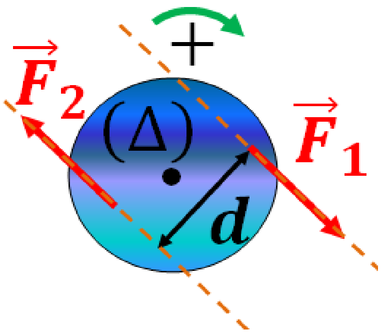
ه- احسب $\mathcal{M}_C$ عزم مزدوجة القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$ عزم القوة $\vec{T}$. ثم احسب $\sum\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ المجموع الجبري لعزوم كل القوى المطبقة على الساق .

لدينا $\mathcal{M}_C = F.d = m_1.g.d = 0,1 \times 10 \times (14 + 5).10^{-2} = 0,190N.m$

و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = -T.d_0 = -1,4 \times 0,14 = -0,196N.m$

و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خطي تأثيري $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) .

إذن $\sum\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_C = 0 + 0 - 0,196 + 0,190 \approx 0$.



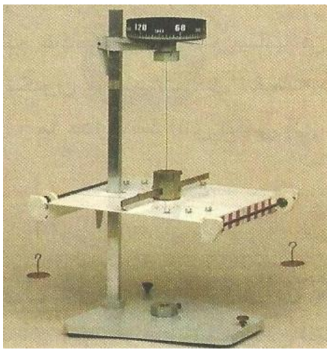
4-3- عزم مزدوجة قوتين :

عزم مزدوجة قوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بالنسبة لمحور دوران ثابت (Δ) عمودي على مستوى المزدوجة هو **جذاء الشدة F المشتركة للقوتين** و **المسافة d الفاصلة بين خطي تأثيريهما** : $\mathcal{M}_C = \pm F.d$.

الإشارة $(\pm)$ تتعلق بمنحى الدوران الموجب كما أن **عزم مزدوجة قوتين لا يتعلق بمحور الدوران** .

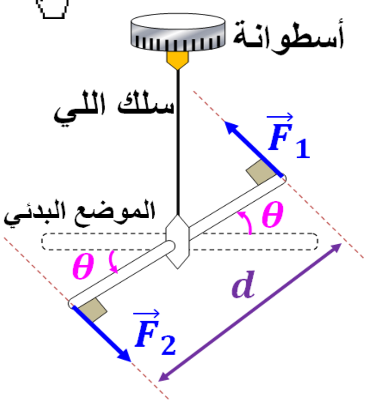
5- عزم مزدوجة اللي :

5-1- نشاط :



يحمل الجهاز الممثل جانبه اسم **نواس اللي** ، يتكون من **سلك فولاذي أسطواني** محوره رأسي ثبت أعلاه بأسطوانة مدرجة من $0°$ إلى $150°$ ، بينما يحمل في طرفه الأسفل **قضيبا فلزيا متجانسا أفقيا** .

عندما نطبق على القضيب **مزدوجة قوتين** $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بواسطة خيطين غير مدودين يمران عبر مجرى بكرة ، يدور القضيب بزاوية θ فيلتوي السلك الفولاذي ، وعندما نحرر القضيب من مزدوجة القوتين يعود إلى موضعه الأصلي تحت تأثير مزدوجة تسمى **مزدوجة اللي** نرمز لها بـ $\sum \vec{f}_i$ ولعزمها بـ $\mathcal{M}_T$.



أ- ما سبب رجوع القضيب إلى موضع توازنه البدئي عند حذف مزدوجة القوتين ؟

يرجع القضيب إلى موضع توازنه البدئي لكون **السلك الملتوي** يطبق بدوره على القضيب **قوى ارتداد** تشكل **مزدوجة اللي** $\sum \vec{f}_i$.

ب- اجرد القوى المطبقة على القضيب عند التوازن .

المجموعة المدروسة : { القضيب } .

جرد القوى : $\vec{P}$ وزنه و $\vec{R}$ تأثير المحور (Δ) ومزدوجة القوتين $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ و**مزدوجة اللي** $\sum \vec{f}_i$.

ج- بدراسة توازن القضيب عندما يكون السلك ملتويا ، استنتج العلاقة بين $\mathcal{M}_T$ عزم مزدوجة اللي و $\mathcal{M}_C$ عزم مزدوجة القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

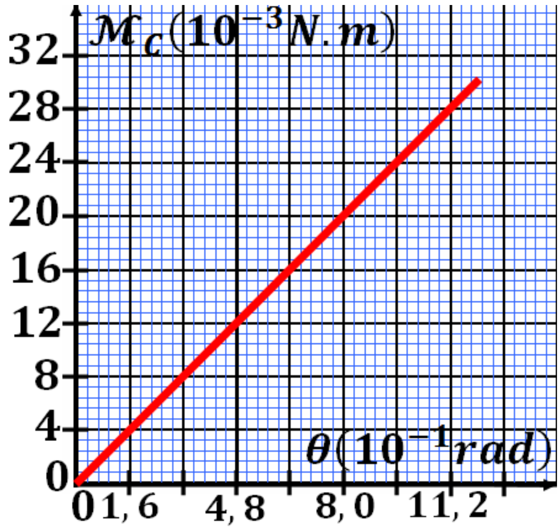
القضيب في توازن ، إذن **المجموع الجبري لعزوم** كل القوى **منعدم** $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ لأن خطي تأثيري $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) .

إذن $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_T + \mathcal{M}_C = 0$ وبالتالي $\mathcal{M}_T = -\mathcal{M}_C$.

د- نقوم بتغيير عزم المزدوجة القوتين ، وذلك إما بتغيير الشدة المشتركة F للقوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ أو بتغيير المسافة d الفاصلة بين خطي تأثيريهما . ندون في كل مرة قيمة الزاوية θ التي تدور بها الساق في الجدول التالي . أتمم الجدول .

$F(N)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3
$d(m)$	0,04	0,06	0,06	0,08	0,08	0,10
$\mathcal{M}_C(N.m)$	0,004	0,006	0,012	0,016	0,024	0,030
$\theta(°)$	9,17	13,75	27,50	36,67	55,00	68,75
$\theta(rad)$	0, 16	0,24	0,48	0,64	0,96	1,20



هـ- مثل المنحنى $\mathcal{M}_C = f(\theta)$ تغيرات $\mathcal{M}_C$ بدلالة θ .

انظر جانبه .

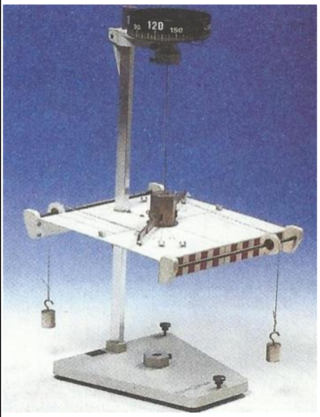
و- اكتب معادلة الدالة $\mathcal{M}_C = f(\theta)$ ، ثم عين مبيانيا قيمة المعامل الموجه للمنحنى و استنتج تعبير عزم مزدوجة اللي $\mathcal{M}_T$.

المنحنى عبارة عن دالة خطية تمر من أصل المعلم تكتب على شكل $\mathcal{M}_C = C.\theta$

حيث $C = \frac{\mathcal{M}_C}{\theta} = \frac{0{,}012}{0{,}48} = 0{,}025N.m.rad^{-1}$

نعلم أن $\mathcal{M}_T = -\mathcal{M}_C$ إذن $\mathcal{M}_T = -C.\theta$.

5-2- مزدوجة اللي :



نسمي **نواس اللي** الجهاز المكون من **سلك فولاذي أسطواني** محوره رأسي ثبت أعلاه بأسطوانة مدرجة من $0°$ إلى $150°$ ، بينما يحمل في طرفه الأسفل **قضيبا فلزيا متجانسا أفقيا** .

عند تطبيق مزدوجة قوتين على الجزء غير المثبت لسلك اللي ، يلتوي السلك ، فنقول أن تأثير المزدوجة أدى إلى لي السلك بحيث تدور النقط المكونة لمولدات السلك بزاوية θ فتسلط المولدات قوى $\sum \vec{f}_i$ تسمى **مزدوجة اللي** تسعى إلى إعادة السلك إلى شكله الأصلي فتمتاز **بخاصية الارتداد** ونرمز **لعزم مزدوجة اللي** بـ $\mathcal{M}_T$.

القضيب في توازن ، إذن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_T + \mathcal{M}_C = 0$

وبالتالي : $\mathcal{M}_T = -\mathcal{M}_C$.

5-3- عزم مزدوجة اللي :

عند لي سلك فلزي بزاوية فإن هذا الأخير يطبق **مزدوجة اللي** تقاوم هذا الالتواء ، تعبير **عزم مزدوجة اللي** هو : $\mathcal{M}_T = -C.\theta$ حيث نسمي **ثابتة لي السلك** ، وحدتها في (ن ع) هي $N.m.rad^{-1}$.

تتعلق C **ثابتة لي السلك** بطوله و مقطعه ونوعيته .