

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الحساب المثلثي الجزء الثاني
المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجيا

أكاديمية
الجهة
الشرقية

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) نقوم بالتأطير: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني $-1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$

يعني $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ يعني $1 - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + 2k - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{3}$

يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

اذن : $k = 0$ $-0.66 \approx -\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \approx 0.33$

ومنه : نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{\pi}{3}$ أي $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني

$-\frac{1}{3} < 2k \leq \frac{5}{3}$ يعني $-1 < \frac{2}{3} + 2k - \frac{2}{3} \leq 1 + \frac{2}{3}$

يعني $-\frac{1}{6} < k \leq \frac{5}{6}$ يعني $-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$

ومنه : نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$

أي : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x = 1$

الجواب:

$\tan x = 1$ يعني $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ يعني $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث

$k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقيين x و y .

$k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = -y + 2k\pi \end{cases}$	$\cos x = \cos y$ تكافئ أو
$k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$	$\sin x = \sin y$ تكافئ أو
$k \in \mathbb{Z}$	$x = y + k\pi$	$\tan x = \tan y$ تكافئ

تمرين 5: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) الجواب: $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ يعني $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وحلول المعادلة هي : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

تمرين 6: (1) حل في $[0, 2\pi[$ المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$

تمرين 1: (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

(2) حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

(1) الأجوبة: $\cos x = \frac{1}{2}$ يعني $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) نقوم بالتأطير: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني $-1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$

يعني $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ يعني $1 - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + 2k - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{3}$

يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

اذن : $k = 0$ $-0.66 \approx -\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \approx 0.33$

ومنه : نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$

أي : $x_1 = \frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني

$-1 < -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$ يعني $-1 + \frac{1}{3} < -\frac{1}{3} + 2k + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$

يعني $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$

اذن : $k = 0$ $-0.33 \approx -\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3} \approx 0.66$

ومنه : نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$ أي : $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = 2$

(1) الجواب: لدينا : $a = 2 > 1$ ومنه : فان المعادلة :

$\cos x = 2$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ أي : $S = \emptyset$

تمرين 3: (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) الجواب: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\sin x = 1$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\sin x = 0$ تكافئ $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\sin x = -1$ تكافئ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\cos x = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$ (5) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (4) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ (3)

$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ يعني $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) **الجواب:**

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ ومنه :

$\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ يعني $\cos x = -\frac{1}{2}$ (2)

$\cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$ يعني $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$ يعني

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ ومنه :

$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$ يعني $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ (3)

$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$ يعني

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني

$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$ أو $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ يعني

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$ ومنه :

$\sin x = -\sin \frac{\pi}{6}$ يعني $\sin x = -\frac{1}{2}$ (4)

$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ يعني $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$ يعني

أو $\pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ ومنه :

$\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$ يعني $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ (5) يعني

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$ يعني

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ي

(2) حل في $[0, 2\pi[$ المعادلة : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: (1) $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ يعني $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ لأن: $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

يعني $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$ يعني $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

نقوم بالتأطير: (أ) $0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $0 \leq \frac{2}{3} + 2k < 2$

يعني $-\frac{1}{3} \leq k < \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} \leq 2k < 2 - \frac{2}{3}$

يعني $k = 0$: ان $-0.33 \approx -\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3} \approx 0.66$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$

أي : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0 \leq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني

$\frac{1}{3} \leq k < \frac{4}{3}$ يعني $\frac{2}{3} \leq 2k < 2 + \frac{2}{3}$ يعني $0 \leq -\frac{2}{3} + 2k < 2$

يعني $k = 1$: ان $0.33 \approx \frac{1}{3} < k \leq \frac{4}{3} \approx 1.33$

ومنه :نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi$

أي : $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$

(2) $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$ يعني $\sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

لأن: $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$ يعني $\sin x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$ أو $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

نقوم بالتأطير: (أ) $0 \leq -\frac{1}{4} + 2k < 2$ يعني $0 \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

يعني $\frac{1}{4} \leq 2k < 2 + \frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8} \leq k < \frac{9}{8}$ ان $k = 1$:

ومنه :نعوض k ب 1 فنجد : $x_1 = \frac{7\pi}{4}$ أي $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1 \times \pi$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0 \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

يعني $0 \leq \frac{5}{4} + 2k < 2$ يعني $-\frac{5}{4} \leq 2k < 2 - \frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$

ان : $k = 0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S = \left\{ \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$

ملخص لمعادلات خاصة:

$\cos x = 1$ تكافئ $x = 2k\pi$
$\cos x = 0$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$ تكافئ $x = (2k + 1)\pi$

$$4 \tan x + 4 = 0 \text{ يعني } \tan x = -1 \text{ يعني}$$

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ يعني } \tan x = -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ ومنه: }$$

$$(2) \text{ نحل في } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ المعادلة : } 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \text{ يعني } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = -\sin \frac{\pi}{4} \text{ يعني } \sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{أو } k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\bullet \text{ نقوم أولا بتأطير } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \text{ يعني } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{يعني } -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{11}{8} \text{ يعني } -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{يعني } -0,12 \leq k \leq 1,37 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن } k=0 \text{ أو } k=1$$

$$\text{إذا كان } k=0 \text{ نجد } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{إذا كان } k=1 \text{ نجد } x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\bullet \text{ نقوم بتأطير } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \text{ يعني } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{يعني } -\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8} \text{ يعني } -\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$$

$$\text{يعني } -0,8 \leq k \leq 0,6 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن } k=0$$

$$\text{إذا كان } k=0 \text{ نجد } x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\} \text{ ومنه: }$$

$$\text{تمرين 10: حل في } [0, 3\pi] \text{ معادلة : } \sin x = 0$$

$$\text{الجواب: } \sin x = 0 \text{ يعني } x = k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{نقوم بالتأطير: } 0 \leq k\pi \leq 3\pi \text{ يعني } 0 \leq k \leq 3$$

$$\text{اذن : } k=0 \text{ أو } k=1 \text{ أو } k=2 \text{ أو } k=3$$

$$\text{ومنه: نعوض } k \text{ بهذه القيم فنجد:}$$

$$x_0 = 0 \times \pi \text{ أو } x_1 = 1 \times \pi \text{ أو } x_2 = 2 \times \pi \text{ أو } x_3 = 3 \times \pi$$

$$\text{أي : } x_0 = 0 \text{ أو } x_1 = \pi \text{ أو } x_2 = 2\pi \text{ أو } x_3 = 3\pi$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ أو } \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \text{ يعني}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\} \text{ ومنه: }$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث}$$

$$\text{تمرين 8: حل في } [-\pi, \pi] \text{ معادلة : } \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{الجواب: } \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6} \text{ يعني } \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{يعني } 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ أو } 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$$

$$\text{يعني } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ أو } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$$

$$\text{حيث } k' \in \mathbb{Z} \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ نقوم أولا بتأطير } x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$\circ \text{ إذا كان } k=-1 \text{ نجد } x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$$

$$\text{وهذا العدد ينتمي للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$\circ \text{ إذا كان } k=0 \text{ نجد } x_2 = \frac{\pi}{12} \text{ وهذا العدد ينتمي للمجال}$$

$$[-\pi, \pi]$$

$$\circ \text{ إذا كان } k=1 \text{ نجد } x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \text{ وهذا العدد لا}$$

$$\text{ينتمي للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$\bullet \text{ نقوم بتأطير } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$$

$$\circ \text{ إذا كان } k'=-1 \text{ نجد } x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$$

$$\text{وهذا العدد لا ينتمي للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$\circ \text{ إذا كان } k'=0 \text{ نجد } x_3 = -\frac{\pi}{12} \text{ وهذا العدد ينتمي}$$

$$\text{للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$\circ \text{ إذا كان } k'=1 \text{ نجد } x_4 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12} \text{ وهذا}$$

$$\text{العدد لا ينتمي للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$\circ \text{ إذا كان } k'=2 \text{ نجد } x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12} \text{ وهذا}$$

$$\text{العدد لا ينتمي للمجال } [-\pi, \pi]$$

$$S = \left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\} \text{ ومنه: }$$

$$\text{تمرين 9: حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة : } 4 \tan x + 4 = 0$$

$$(2) \text{ حل في } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ المعادلة : } 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$$

$$\text{الجواب: (1) المعادلة } 4 \tan x + 4 = 0 \text{ معرفة يعني}$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي : $S = \{0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$

تمرين 11:

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(2) حل في $[0; \pi]$ المعادلة: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

(3) حل في $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

الجواب: (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

تعني $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$ أو $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

تعني $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

تعني $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) حل في $[0; \pi]$ المعادلة:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

تعني $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ أو $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

تعني $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

تعني $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ أو $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

• نقوم أولاً بتأطير $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } 0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$$

تعني $-\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36}$ تعني $0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1$

تعني $k \in \mathbb{Z}$ حيث $-0,29 \leq k \leq 1,2$

اذن $k=0$ أو $k=1$

إذا كان $k=0$ نجد $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

إذا كان $k=1$ نجد $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

• نقوم بتأطير $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } 0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$$

تعني $0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1$ تعني $-\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24}$

تعني $-0,54 \leq k \leq -0,04$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اذن لا توجد قيمة للعدد k حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $-0,54 \leq k \leq 0,04$

ومنه $S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}\right\}$

(3) حل في $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

المعادلة $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ معرفة يعني

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يعني $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

يعني $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$ يعني $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$

اذن : $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

نعلم أن $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ اذن $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

يعني $2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ يعني $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

يعني $2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi$ يعني $x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

• نقوم بتأطير $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يعني $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ يعني $-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$

يعني $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$ يعني $-\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20}$

يعني $-1,45 \leq k \leq 0,55$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اذن $k=0$ أو $k=-1$

إذا كان $k=0$ نجد $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

إذا كان $k=-1$ نجد $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$

ومنه : $S = \left\{-\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40}\right\}$

تمرين 12: حل في $[-\pi; 2\pi]$ المعادلة : $\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$ يعني $\cos x = 0$ أو $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$

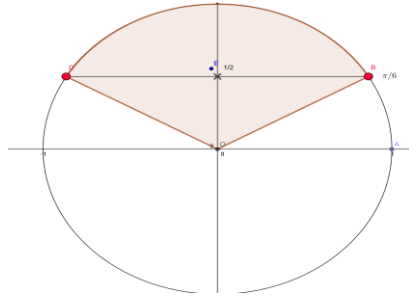
يعني $\cos x = 0$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يعني $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يعني $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

تمرين 13: حل في المجال : $[0, 2\pi[$ المتراجحة: $\sin x \geq \frac{1}{2}$

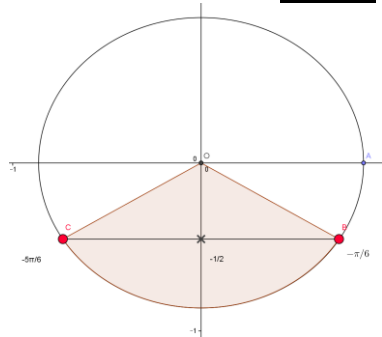
الجواب : $\sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$ يعني $\sin x \geq \frac{1}{2}$



$$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

تمرين 14: حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المتراجحة: $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

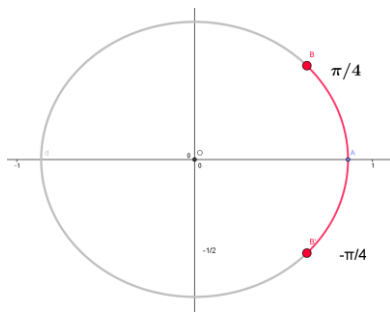
الجواب :



$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right]$$

تمرين 15: حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المتراجحة: $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب :



$$S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

تمرين 16: حل في المجال : $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ المتراجحة: $\cos x \leq \frac{1}{2}$

الجواب :

$$S = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$$

تمرين 17: حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المتراجحات:

$$\cos x \leq 0 \quad (1)$$

$$\sin x \geq 0 \quad (2)$$

نقوم بالتأطير: (أ) $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < 2\pi$ يعني $-1 \leq \frac{1}{2} + k < 2$

يعني $-\frac{3}{2} \leq k < \frac{3}{2}$ يعني $-1 - \frac{1}{2} \leq k < 2 - \frac{1}{2}$

اذن : $k = -1$ أو $k = 1$ أو $k = 0$
ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$$x_3 = \frac{\pi}{2} - 1 \times \pi \text{ أو } x_2 = \frac{\pi}{2} + 1 \times \pi \text{ أو } x_1 = \frac{\pi}{2} + 0 \times \pi$$

$$\text{أي : } x_3 = -\frac{\pi}{2} \text{ أو } x_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ أو } x_1 = \frac{\pi}{2}$$

التأطير: (ب) $-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $-1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 2$

يعني $-\frac{5}{4} \leq 2k < \frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8} \leq k < \frac{7}{8}$

اذن : $k = 0$ ومنه:نعوض k ب 0 فنجد :

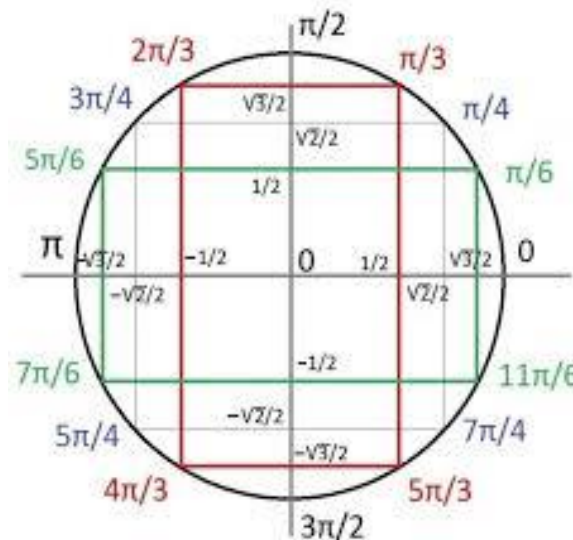
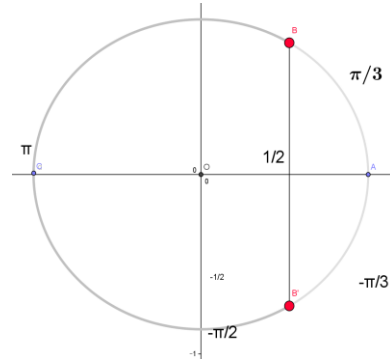
(ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

يعني $-\frac{7}{4} \leq k < \frac{5}{4}$ يعني $-1 - \frac{3}{4} \leq 2k < 2 - \frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8} \leq k < \frac{5}{8}$

اذن : $k = 0$ ومنه:نعوض k ب 0 فنجد :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

وبالتالي : أنظر الدائرة المثلثية:



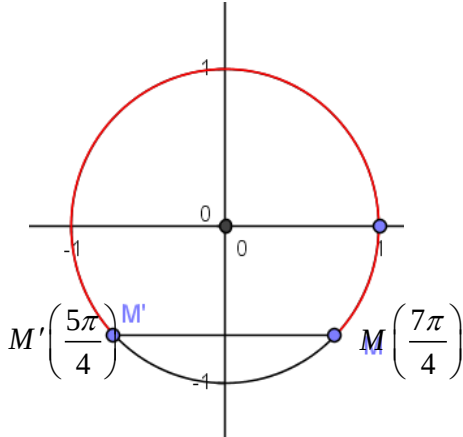
تمرين 22: حل في المجال: $[0; 2\pi]$

المترابحة: $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

نعلم أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x > \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ يعني $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



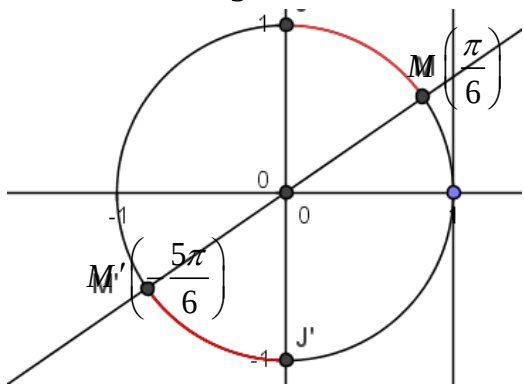
$S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$

تمرين 23: حل في المجال: $[-\pi; \pi]$

المترابحة: $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

الجواب: نعلم أن: $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ يعني $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

تمرين 24: حل في المجال: $[0; 2\pi]$

المترابحة: $\tan x - 1 \geq 0$

الأجوبة: (1) $S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(2) $S = [0, \pi]$

تمرين 18: حل في المجال: $S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

المترابحة: $\tan x \geq 1$

الجواب: $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

تمرين 19: حل في المجال $[-\pi, \pi]$ معادلة: $2\sin 2x - 1 = 0$

الجواب: $2\sin 2x - 1 = 0$ يعني $\sin 2x = \frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

يعني $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

يعني $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ونقوم بالتأطير

ونجد: $S = \left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$

تمرين 20: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة: $(\sin x)^2 + \sin x - 2 = 0$

الجواب: نضع: $X = \sin x$ والمعادلة تصبح: $X^2 + X - 2 = 0$

نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = (3)^2 > 0$

فان هذه المعادلة لها حلين هما: $X_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = 1$ أو $X_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = -2$

ومنه بالرجوع للمتغير الأصلي نجد:

$\sin x = 1$ أو $\sin x = -2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $[-\pi, \pi]$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $[-\pi, \pi]$

اذن فقط نحل المعادلة: $\sin x = 1$ (معادلة خاصة)

$\sin x = 1$ يعني: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه: $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

تمرين 21: ABC مثلث بحيث: $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ و $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ و

$BC = 4\text{cm}$

أحسب: $\hat{C}$ و $AC = b$ و AC

أجوبة: (1) حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ يعني

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \hat{C} = \pi$

$\hat{C} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

يعني $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$

حساب AC (1)

لدينا: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ يعني $\frac{4}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}}$

يعني $b = \frac{4 \times \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$

يعني $AC = 2\sqrt{6}$

يعني $4 \times \sin \frac{\pi}{3} = AC \times \sin \frac{\pi}{4}$

$4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = AC \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sqrt{3} = AC \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AC = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

تعني $\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ $0,08 \leq k \leq 1,02$

اذن : $k=1$ ومنه $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

• نقوم بتأطير $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k \leq 2$ تعني $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

تعني $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ $-0,5 \leq k \leq 0,41$

اذن : $k=0$ ومنه $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

ومنه : $S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$

(ب) نحل في $[0; 2\pi]$ المتراجحة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$$

تعني $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

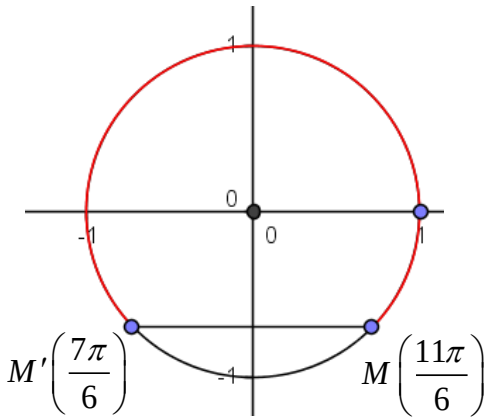
ونعلم أن : $-1 \leq \sin x \leq 1$ اذن $-1 \leq \sin x \leq 1$

اذن : $\sin x - 5 < 0$

وبما أن $\sin x - 5 < 0$ و $2 > 0$

فان : $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$ تعني $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$

تعني $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ تعني $\sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$



ومنه $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

(2) نحل في $[0; \pi]$ المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

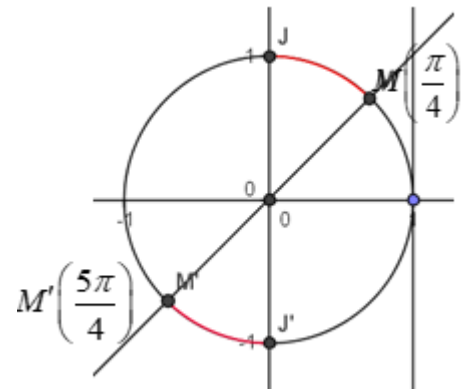
المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ معرفة يعني

$k \in \mathbb{Z}$ حيث $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

اذن : $D = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

الجواب : $\tan x - 1 \geq 0$ يعني $\tan x \geq 1$

نعلم أن : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$



$$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

تمرين 25:

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ واستنتج الحلول في المجال $[0; 2\pi]$

(ب) حل في $[0; 2\pi]$ المتراجحة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

(2) حل في $[0; \pi]$ المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

الجواب : نضع $t = \sin x$

$2t^2 - 9t - 5$ تعني $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

نستعمل المحددة $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5)$

اذن : $\Delta = 121$

الجنذور هي : $t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ و $t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5$

اذن : $\sin x = 5$ و $\sin x = -\frac{1}{2}$

ونعلم أن : $-1 \leq \sin x \leq 1$ اذن المعادلة $\sin x = 5$ ليس لها حل

$\sin x = -\frac{1}{2}$ تعني $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

تعني $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تعني $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

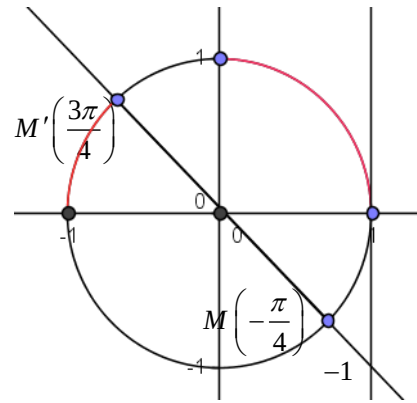
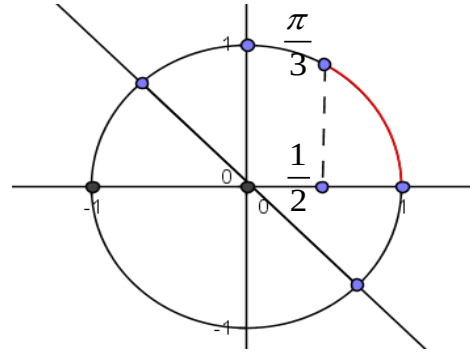
ومنه $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

• نقوم بتأطير $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k \leq 2$ تعني $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

$$\cos x \geq \cos \frac{\pi}{3} \text{ تعني } \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ تعني } 2\cos x - 1 \geq 0$$

$$\tan x \geq \tan \left(\frac{3\pi}{4} \right) \text{ تعني } \tan x \geq -1 \text{ تعني } \tan x + 1 \geq 0$$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	+	+	0	+
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	-	-	+	-

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$