هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الحساب المثلثي الجزء الثاني

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=\frac{1}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\cos x=\frac{1}{2}$

الأجوبة : 1) $\cos x=\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير:أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{1}{3}\le-1+\frac{1}{3}+2k<1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

اذن : $k=0$ $-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير :$-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<-\frac{1}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}+2k+\frac{1}{3}\le1+\frac{1}{3}$ يعني

$-\frac{2}{3}<2k\le\frac{4}{3}$

يعني $-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}$ يعني

اذن : $k=0$ $-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$

ومنه :نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$ أي : $x_1=-\frac{\pi}{3}$ $x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=2$

الجواب: لدينا : $a=2>1$ ومنه : فان المعادلة :

$\cos x=2$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ أي : $S=\varnothing$

تمرين3: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير:أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{1}{3}\le-1+\frac{1}{3}+2k<1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

اذن : $k=0$ $-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير :$-\pi<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<\frac{2}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{2}{3}<2k\le1+\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}<2k\le\frac{5}{3}$

يعني $-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{6}<k\le\frac{5}{6}$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

تمرين4:حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x=1$

الجواب:

$\tan x=1$ يعني $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقين x و y.

$k\in\mathbb{Z}\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=-y+2k\pi\end{cases}$ تكافئ أو $\cos x=\cos y$
$k\in\mathbb{Z}\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=(\pi-y)+2k\pi\end{cases}$ تكافئ أو $\sin x=\sin y$
$k\in\mathbb{Z}$ $x=y+k\pi$ تكافئ $\tan x=\tan y$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجواب: 1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين6: 1) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\cos x=-\frac{1}{2}$

2) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$ يعني

$\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ لأن: $\cos(\pi-x)=-\cos x$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma :

$\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ يعني

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le\frac{2}{3}+2k<2$

يعني $-\frac{2}{3}\le 2k<2-\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}\le k<\frac{2}{3}$

يعني $-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq 0.66$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني

$0\le-\frac{2}{3}+2k<2$ يعني $\frac{2}{3}\le 2k<2+\frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3}\le k<\frac{4}{3}$

يعني $0.33\simeq\frac{1}{3}<k\le\frac{4}{3}\simeq1.33$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=-\frac{2\pi}{3}+2\times1\times\pi$

أي : $x_2=\frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

لأن: $\sin(-x)=-\sin x$

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ يعني $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le-\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $\frac{1}{4}\le 2k<2+\frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8}\le k<\frac{9}{8}$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 فنجد : $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times1\times\pi$ أي : $x_1=\frac{7\pi}{4}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $0\le\frac{5}{4}+2k<2$ يعني $-\frac{5}{4}\le 2k<2-\frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{3}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب à فنجد : $x_2=\frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

ملخص لمعادلات خاصة:

$\cos x=1$ تكافئ	$x=2k\pi$
$\cos x=0$ تكافئ	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=-1$ تكافئ	$x=(2k+1)\pi$
$\sin x=1$ تكافئ	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
$\sin x=0$ تكافئ	$x=k\pi$ $\quad(k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=-1$ تكافئ	$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

تمرين7: حل في $[0,3\pi]$ معادلة : $\sin x=0$

الجواب: $\sin x=0$ يعني $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0\le k\pi\le3\pi$ يعني $0\le k\le3$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_0=0\times\pi$ أو $x_1=1\times\pi$ أو $x_2=2\times\pi$ أو $x_3=3\times\pi$

أي : $x_0=0$ أو $x_1=\pi$ أو $x_2=2\pi$ أو $x_3=3\pi$

وبالتالي : $S=\{0;\pi;2\pi;3\pi\}$

تمرين8: حل في ال $[-\pi,2\pi[$ معادلة : $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ يعني $\cos x=0$ أو $\sqrt{2}\sin x-1=0$

يعني $\cos x=0$ أو $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $-\pi\le\frac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{2}+k<2$

يعني $-1-\frac{1}{2}\le k<2-\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le k<\frac{3}{2}$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=-1$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_1=\frac{\pi}{2}+0\times\pi$ أو $x_2=\frac{\pi}{2}+1\times\pi$ أو $x_3=\frac{\pi}{2}-1\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{2}$ أو $x_2=\frac{3\pi}{2}$ أو $x_3=-\frac{\pi}{2}$

التأطير:ب) $-\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $-1-\frac{1}{4}\le2k<2-\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{5}{4}\le2k<\frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{7}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_4=\frac{\pi}{4}$

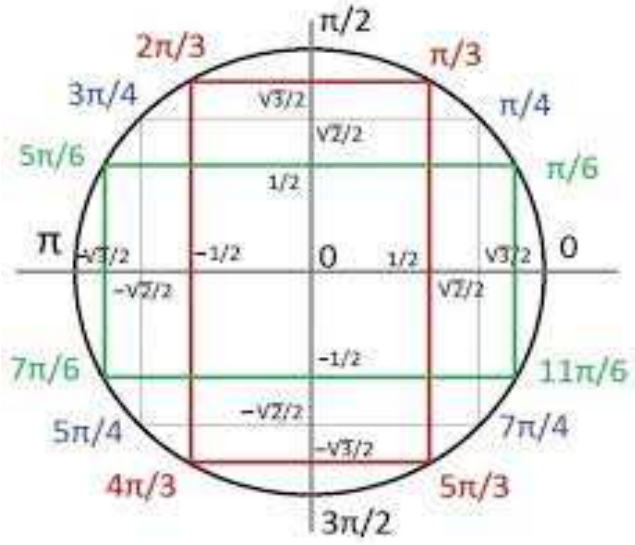
ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $-1\le\frac{3}{4}+2k<2$ يعني $-1-\frac{3}{4}\le2k<2-\frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k<\frac{5}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_5=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

أنظر الدائرة المثلثية:



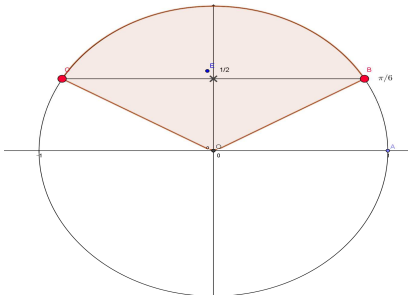
الأستاذ : عثماني نجيب

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تمرين9: حل في المجال $[0,2\pi[$ المتراجحة: $\sin x \geq \frac{1}{2}$

الجواب : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ يعني $\sin x \geq \sin\frac{\pi}{6}$

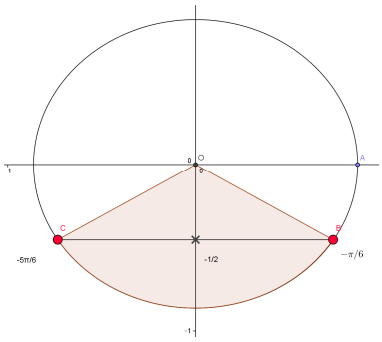


$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

تمرين10: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المتراجحة: $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

الجواب

$S = \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$:



تمرين11: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المتراجحة: $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

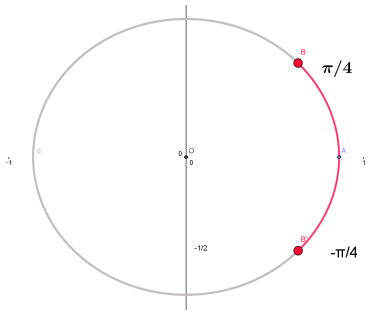
الجواب :

$S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

تمرين12: حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ المتراجحة: $\cos x \leq \frac{1}{2}$

الجواب :

$S = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$



تمرين13: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحات:(1

$\cos x \leq 0$ (2 $\sin x \geq 0$ **الأجوبة :**

(1 $S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (2 $S = [0,\pi]$

تمرين14: حل في المجال: $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة: $\tan x \geq 1$

الجواب : $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين15: ABC مثلث بحيث : $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ و $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ و

$BC = 4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC = b$ و AC

أجوبة:1)حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ يعني

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \hat{C} = \pi$

يعني $\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \hat{C} = \pi$ يعني $\hat{C} = \pi - \frac{7\pi}{12}$ يعني $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$

(1 حساب AC

لدينا: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$ يعني $\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}$

يعني $4\times\sin\frac{\pi}{3} = AC\times\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $AC = \frac{4\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

تمرين16: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ معادلة : $2\sin 2x - 1 = 0$

الجواب: $2\sin 2x - 1 = 0$ يعني $\sin 2x = \frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$

يعني $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

يعني $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ونقوم بالتأطير

ونجد : $S = \left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$

تمرين17: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة: $(\sin x)^2 + \sin x - 2 = 0$

الجواب: نضع: $X = \sin x$ **والمعادلة تصبح :** $X^2 + X - 2 = 0$

نحسب المميز : Δ $a = 1$ و $b = 1$ و $c = -2$

بما أن $\Delta > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times(-2) = 9 = (3)^2 > 0$

فان هذه المعادلة لها حلين هما: $X_1 = \frac{-1+3}{2\times1} = 1$ **أو** $X_2 = \frac{1-3}{2\times1} = -2$

ومنه بالرجوع للمتغير الأصلي نجد :

$\sin x = 1$ **أو** $\sin x = -2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

اذن فقط نحل المعادلة : $\sin x = 1$ (معادلة خاصة)

يعني : $\sin x = 1$ **ومنه :** $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma