



الهندسة

مذكرة رقم 11 : ملخص لدروس: الحساب المثلثي 2 مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

الجزء الثاني:

- التمثيل المبياني للدالتين $\sin$ و $\cos$
- المعادلات والمتراجحات المثلثية الأساسية:

$$\tan x = a \quad \cos x = a \quad \sin x = a$$

$$\tan x \geq a \quad \cos x \geq a \quad \sin x \geq a$$

$$\tan x \leq a \quad \cos x \leq a \quad \sin x \leq a$$

- الزوايا المحيطية، الرباعيات الدائرية؛

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$s = pr \quad s = \frac{1}{2} ab \sin C$$

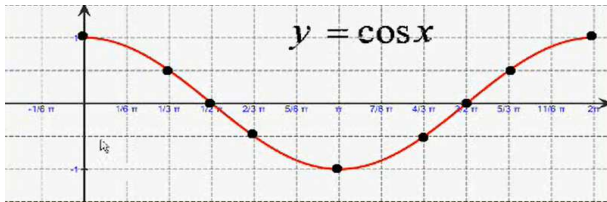
- التمكن من رسم منحني كل من الدالتين $\sin$ و $\cos$ واستثماره في إدراك وتثبيت مفاهيم الدورية والزوجية والرتابة ...

- التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية؛

- يمكن بمناسبة إنشاء التمثيل المبياني للدالتين $\sin$ و $\cos$ ، التعرض إلى مفهوم الدالة الدورية (تعريفه وإعطاء بعض العلاقات المميزة له).
- يعتبر حل المعادلات والمتراجحات المثلثية المحددة في البرنامج مناسبة لتعميق التعامل مع الدائرة المثلثية.

- تعتبر دراسة الزوايا المحيطية والرباعيات الدائرية مناسبة لتثبيت وتقوية مكتسبات التلاميذ في جل مفاهيم الهندسة المستوية وإثبات بعض العلاقات في المثلث.

التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال $[0; 2\pi]$



ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحني الدالة $\cos$ ؟ أصغر قيمة؟ أكبر قيمة؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على: $\mathbb{R}$

نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

II. المعادلات المثلثية الأساسية:

خاصية 1: $a \in \mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة: $\cos x = a$: (E)

• اذا كان: $a > 1$ أو $a < -1$ فان المعادلة: $\cos x = a$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$.

• اذا كان: $-1 \leq a \leq 1$ -فانه يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\cos x = \cos x_0$$

وحلول المعادلة $\cos x = a$: (E) في $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية :

$$x_0 + 2k\pi \quad \text{أو} \quad -x_0 + 2k\pi \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{مثال 1: (1) حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة: } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ حل في المجال }]-\pi, \pi] \text{ المعادلة: } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\text{الجواب (1): } \cos x = \frac{1}{2} \text{ يعني } \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{وحلول المعادلة هي: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

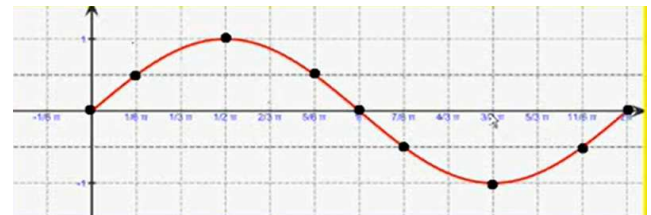
$$(2) \text{ نقوم بالتأطير: (أ) } -\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \text{ يعني } -1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$$

$$\text{يعني } -\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3} \text{ يعني } 1 - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + 2k - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{3}$$

I. التمثيل المبياني للدالتين $\sin$ و $\cos$

دراسة وتمثيل الدالة $\sin$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0

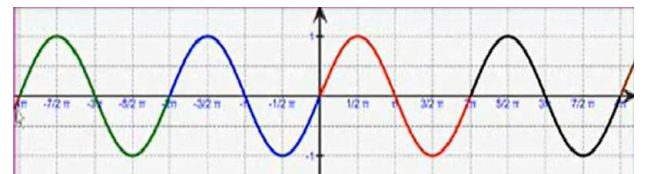


رسم منحني الجيب: $y = \sin x$

كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال $[0; 2\pi]$

ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحني الدالة $\sin$ ؟ أصغر قيمة؟ أكبر قيمة؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على المجال $\mathbb{R}$



نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

دراسة وتمثيل الدالة $\cos$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

رسم منحني الجيب: $y = \cos x$ و كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$$

أي : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

خاصية 3: $a \in \mathbb{R}$ ونعتبر المعادلة : $\tan x = a$: (E)

يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $\tan x = \tan x_0$; وحلول المعادلة (E) في

$\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية : $x_0 + k\pi$ أو x_0 حيث $k \in \mathbb{Z}$

هي الأعداد الحقيقية : $x_0 + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x = 1$
الجواب:

$\tan x = 1$ يعني $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ يعني $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقيين x و y .

$k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = -y + 2k\pi \end{cases}$	$\cos x = \cos y$ تكافئ أو
$k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$	$\sin x = \sin y$ تكافئ أو
$k \in \mathbb{Z}$	$x = y + k\pi$	$\tan x = \tan y$ تكافئ

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(الجواب: 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

تمرين 2: (1) حل في $[0, 2\pi[$ المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$

(2) حل في $[0, 2\pi[$ المعادلة : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(الجواب: 1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ يعني $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ يعني $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

لأن : $\cos(\pi - x) = -\cos x$

يعني $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$ يعني $\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

نقوم بالتأطير: (أ) $0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k < 2$

يعني $-\frac{2}{3} \leq 2k < 2 - \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3} \leq k < \frac{2}{3}$

يعني $-\frac{1}{3} \leq k < \frac{2}{3}$ إذن : $k = 0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

أي : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0 \leq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني

$0 \leq -\frac{2}{3} + 2k < 2$ يعني $\frac{2}{3} \leq 2k < 2 + \frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3} \leq k < \frac{4}{3}$

يعني $\frac{1}{3} \leq k < \frac{4}{3}$ إذن : $k = 1$

يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$

إذن : $k = 0$ $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \approx 0.33$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{\pi}{3}$

أي : $x_1 = \frac{\pi}{3}$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني

$-1 < -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$ يعني $-\frac{1}{3} < 2k + \frac{1}{3} \leq 1$ يعني $-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$

$-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$

يعني $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$ يعني $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$

إذن : $k = 0$ $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3} \approx 0.66$

ومنه: نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi$

أي : $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$

مثال 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = 2$

الجواب: لدينا : $a = 2 > 1$ ومنه : فإن المعادلة : $\cos x = 2$

ليس لها حلولاً في $\mathbb{R}$ أي : $S = \emptyset$

خاصية 2: $a \in \mathbb{R}$ ونعتبر المعادلة : $\sin x = a$: (E)

إذا كان : $a > 1$ أو $a < -1$ فإن المعادلة : (E) ليس لها حلولاً في $\mathbb{R}$.

إذا كان : $-1 \leq a \leq 1$ فإنه يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $\sin x = \sin x_0$

وحلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية : $x_0 + 2k\pi$ أو $x_0 + \pi - 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال: (1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(الجواب: 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) نقوم بالتأطير: (أ) $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني $-1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$

يعني $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$

يعني $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$ إذن : $k = 0$

$-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \approx 0.33$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{\pi}{3}$

أي : $x_1 = \frac{\pi}{3}$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني

$-1 < \frac{2}{3} + 2k \leq 1$ يعني $-\frac{5}{3} < 2k \leq \frac{1}{3}$ يعني $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6}$

إذن : $k = 0$ $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6} \approx 0.16$

ومنه: نعوض k بهذه القيم فنجد:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 0 \times \pi \text{ أو } x_2 = \frac{\pi}{2} + 1 \times \pi \text{ أو } x_3 = \frac{\pi}{2} - 1 \times \pi$$

$$\text{أي: } x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ أو } x_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ أو } x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{التأطير (ب): } -\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\pi \text{ يعني } -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 2$$

$$\text{يعني } -1 - \frac{1}{4} \leq 2k < 2 - \frac{1}{4} \text{ يعني } -\frac{5}{4} \leq 2k < \frac{7}{4} \text{ يعني } -\frac{5}{8} \leq k < \frac{7}{8}$$

$$\text{اذن: } k=0 \text{ ومنه: نعوض } k \text{ بـ } 0 \text{ فنجد: } x_4 = \frac{\pi}{4}$$

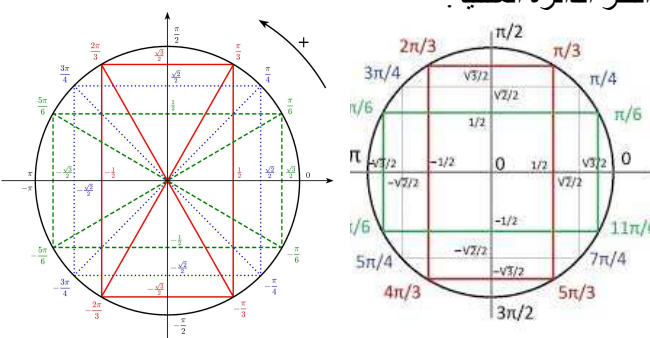
$$\text{(ج) نقوم بعملية التأطير: } -\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$$

$$\text{يعني } -1 - \frac{3}{4} \leq 2k < 2 - \frac{3}{4} \text{ يعني } -\frac{7}{4} \leq 2k < \frac{5}{4} \text{ يعني } -\frac{7}{8} \leq k < \frac{5}{8}$$

$$\text{اذن: } k=0 \text{ ومنه: نعوض } k \text{ بـ } 0 \text{ فنجد: } x_5 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{وبالتالي: } S = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

أنظر الدائرة المثلثية:



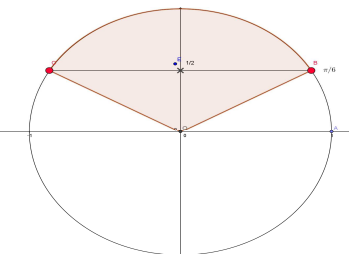
IV. مترجمات مثلثية:

حل هذه المترجمات اعتمادا على الدائرة المثلثية و مثل على الدائرة المثلثية حلول المترجمة:

مثال 1: حل في المجال $[0, 2\pi[$ المترجمة: $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\text{الجواب: } \sin x \geq \frac{1}{2} \text{ يعني } \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

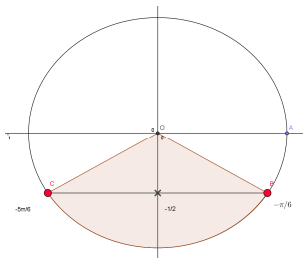
$$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



تمرين 4: حل في المجال $[-\pi, \pi]$ المترجمة:

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}$$

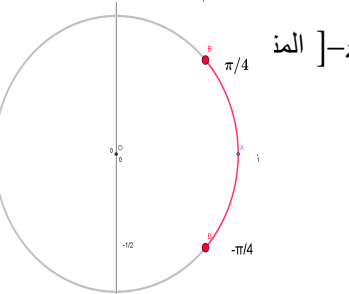
$$\text{الجواب: } S = \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$$



مثال 2: حل في المجال $[-\pi, \pi]$ المترجمة:

الجواب:

$$S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$



$$\text{ومنه: نعوض } k \text{ بـ } 1 \text{ في } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ فنجد: } x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi$$

$$\text{أي: } x_2 = \frac{4\pi}{3} \text{ وبالتالي: } S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ يعني } \sin x = -\sin \frac{\pi}{4} \text{ يعني } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\text{لأن: } \sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ يعني } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{نقوم بالتأطير (أ): } 0 \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \text{ يعني } 0 \leq -\frac{1}{4} + 2k < 2$$

$$\text{يعني } \frac{1}{4} \leq 2k < 2 + \frac{1}{4} \text{ يعني } \frac{1}{8} \leq k < \frac{9}{8} \text{ اذن: } k=1$$

$$\text{ومنه: نعوض } k \text{ بـ } 1 \text{ فنجد: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1 \times \pi \text{ أي: } x_1 = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{(ب) نقوم بنفس عملية التأطير: } 0 \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \text{ يعني } 0 \leq \frac{5}{4} + 2k < 2$$

$$\text{يعني } -\frac{5}{4} \leq 2k < 2 - \frac{5}{4} \text{ يعني } -\frac{5}{8} \leq k < \frac{3}{8} \text{ يعني } -\frac{5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

$$\text{اذن: } k=0 \text{ ومنه: نعوض } k \text{ بـ } 0 \text{ فنجد: } x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{وبالتالي: } S = \left\{ \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

III. معادلات خاصة:

$\cos x = 1$ تكافئ $x = 2k\pi$
$\cos x = 0$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$ تكافئ $x = (2k+1)\pi$
$\sin x = 1$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\sin x = 0$ تكافئ $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = -1$ تكافئ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

مثال: حل في $[0, 3\pi]$ معادلة: $\sin x = 0$

الجواب: $\sin x = 0$ يعني $x = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0 \leq k\pi \leq 3\pi$ يعني $0 \leq k \leq 3$

اذن: $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه: نعوض k بهذه القيم فنجد:

$$x_0 = 0 \times \pi \text{ أو } x_1 = 1 \times \pi \text{ أو } x_2 = 2 \times \pi \text{ أو } x_3 = 3 \times \pi$$

$$\text{أي: } x_0 = 0 \text{ أو } x_1 = \pi \text{ أو } x_2 = 2\pi \text{ أو } x_3 = 3\pi$$

$$\text{وبالتالي: } S = \{0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$$

تمرين 3: حل في $[-\pi, 2\pi[$ معادلة: $\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

$$\text{الجواب: } \cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \text{ يعني } \cos x = 0 \text{ أو } \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

$$\text{يعني } \cos x = 0 \text{ أو } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{يعني } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ أو } \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{يعني } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ أو } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{نقوم بالتأطير (أ): } -\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \text{ يعني } -1 \leq \frac{1}{4} + k < 2$$

$$\text{يعني } -1 - \frac{1}{4} \leq k < 2 - \frac{1}{4} \text{ يعني } -\frac{5}{4} \leq k < \frac{7}{4}$$

$$\text{اذن: } k=0 \text{ أو } k=1 \text{ أو } k=-1$$

تمرين 7: مثلث بحيث : $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ و $BC = 4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC = b$ و AC

أجوبة: (1) حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ يعني $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \hat{C} = \pi$

يعني $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$ يعني $\hat{C} = \pi - \frac{7\pi}{12}$ يعني $\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \hat{C} = \pi$

(1) حساب AC

لدينا: $\frac{4}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}}$ يعني $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

يعني $4 \times \sin \frac{\pi}{3} = AC \times \sin \frac{\pi}{4}$ يعني $AC = \frac{4 \times \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

تمرين 8: حل في المجال $[-\pi, \pi]$ معادلة : $2 \sin 2x - 1 = 0$

الجواب: $2 \sin 2x - 1 = 0$ يعني $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$ يعني $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

يعني $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ونقوم بالتأطير ونجد :

$$S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\}$$

تمرين 9: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة : $(\sin x)^2 + \sin x - 2 = 0$

الجواب: نضع : $X = \sin x$ والمعادلة تصبح : $X^2 + X - 2 = 0$

نحسب المميز : $\Delta = 1 + 8 = 9$ و $a = 1$ و $b = 1$ و $c = -2$

$\Delta > 0$ بما أن $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = (3)^2 > 0$ فان هذه

المعادلة لها حلين هما : $X_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = 1$ أو $X_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = -2$ ومنه

بالرجوع للمتغير الأصلي نجد :

$\sin x = 1$ أو $\sin x = -2$

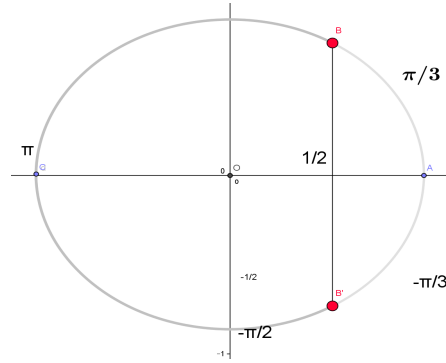
نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $[-\pi, \pi]$

اذن فقط نحل المعادلة : $\sin x = 1$ (معادلة خاصة)

$\sin x = 1$ يعني : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

تمرين 5: حل في المجال : $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ المتراجحة : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

الجواب : $S = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$



تمرين 6: حل في المجال : $[-\pi, \pi]$ المتراجحات: (1) $\cos x \leq 0$

(2) $\sin x \geq 0$ (الأجوبة : 1) $S = [0, \pi]$ (2) $S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$

مثال 3: حل في المجال : $S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ المتراجحة : $\tan x \geq 1$

الجواب : $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

V. علاقات $\sin$ في مثلث :

مثلث بحيث : $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$

نفترض أن ABC قائم الزاوية في A اذن : $\sin \hat{A} = 1$ ومنه :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = a$$

ولدينا كذلك : $\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

ولدينا كذلك : $\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

وبالتالي نجد : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

وهذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لمثلث عادي :

خاصية: إذا كان ABC مثلث بحيث : $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$

فان : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$