عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة – تساوى دالتين – التمثيل المبياني لدالة

1/ تعريف دالة – مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في الحالات التالية

$$a)\ f(x)=\frac{5}{4-x}\ ;\quad b)\ f(x)=\sqrt{2x+1}$$

$$c)\ f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}\ ;\quad d)\ f(x)=\frac{3x}{\sqrt{3-x}}$$

الحل

a) $f(x)=\dfrac{5}{4-x}$

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $4-x\neq 0$

تكافئ $x\neq 4$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$

b) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$x\in D_f$ تكافئ $2x+1\succ 0$

تكافئ $x\geq -\dfrac{1}{2}$

اذن $D_f=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$;

$x\in D_f$ تكافئ $x^2+2x-3\neq 0$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود x^2+2x-3

$\Delta=4+12=16$

و منه لـ x^2+2x-3 جرين هما $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$ و $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي f اذا ربطنا كل عدد من $\mathbb{R}$ على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة x بالدالة f أو باختصار f لـ x

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f

نرمز لها بـ D_f

2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين f و g لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$f(x)=x-1 \quad ; \qquad g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (a

$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{2}{x(x+2)}$ (b

a/ لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه $D_f \neq D_g$ اذن $f \neq g$

b/ لدينا $D_g=D_f=\mathbb{R}^*-\{2\}$

لتكن $x \in \mathbb{R}^*-\{2\}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}=g(\ )$$

إذن $f=g$

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون f و g متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D

$f(x)=g(x)$

3- التمثيل المبياني لدالة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$

أ- حدد D_f

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

د – أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الحل

أ- نحدد D_f

$x \in D_f$ تكافئ $|x|-2 \neq 0$

تكافئ $|x| \neq 2$

تكافئ $x \neq 2$ أو $x=-2$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

ب - نحدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

لدينا $f(0)=\dfrac{-4}{-2}=2$ و منه $A(0;2) \in C_f$

لدينا $f(3)=\dfrac{9-4}{3-2}=5$ و منه $B(3;5) \in C_f$

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

لدينا $2 \notin \mathbb{R}-\{-2;2\}$ ومنه $C(2;0) \in C_f$

لدينا $f(-4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $D(-4;6) \in C_f$

لدينا $f(4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $E(4;-6) \notin C_f$

د – نكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة

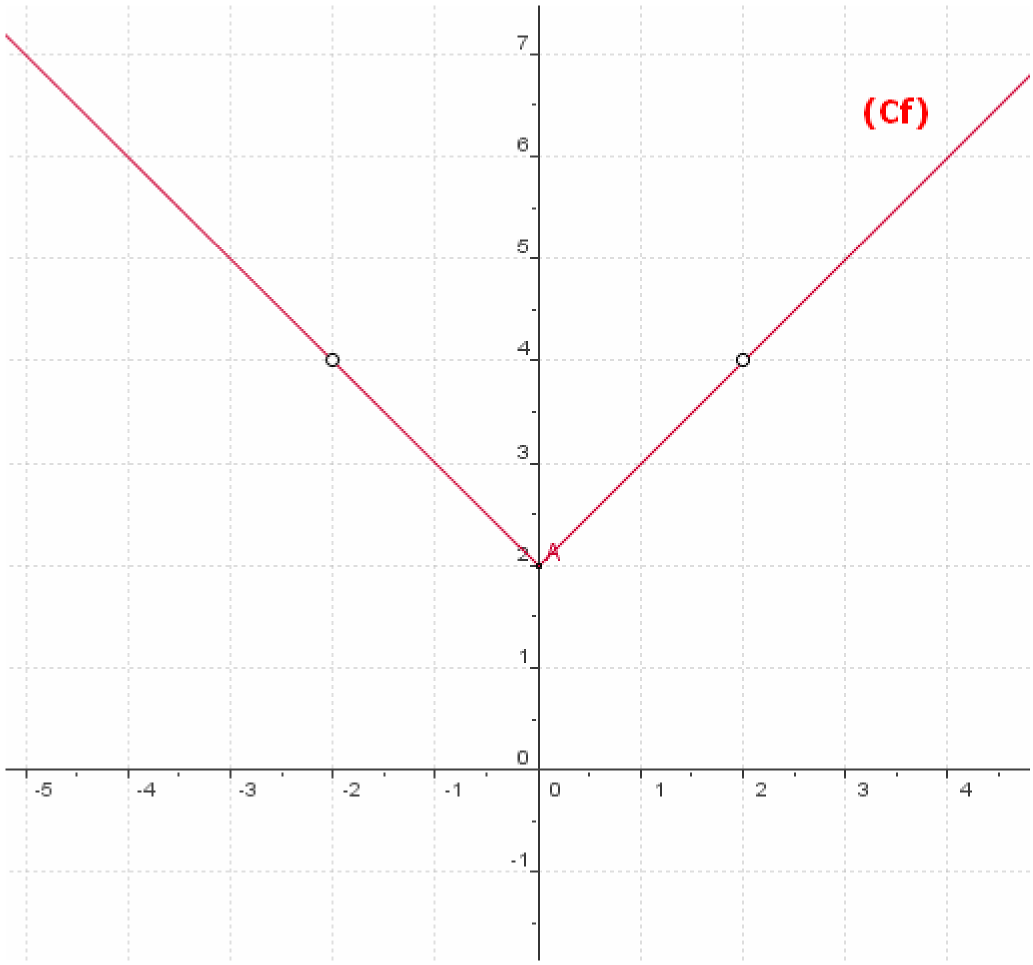
لدينا إذا كان $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

إذا كان $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{-x-2}=-x+2$

ننشئ المنحنى C_f

معادلة جزء C_f على $[0;2[\cup]2;+\infty[$ هي $y=x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2

معادلة جزء C_f على $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ هي $y=-x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2 -



<u>تعريف</u>

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

التمثيل المبياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x\in D_f$ نرمز لها بالرمز C_f $\quad C_f=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

<u>ملاحظة</u>

$M(x;y)\in C_f$ تكافئ $y=f(x)$ و $x\in D_f$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

II - زوجية دالة
1- الدالة الزوجة
أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها
نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :
* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$
* لكل x من D_f $\quad f(-x)=f(x)$

تمرين
هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية

$$a)\ f(x)=|x|-\frac{1}{x^2} \quad ; \quad b)\ f(x)=x^3+1$$

$$c)\ \begin{cases} f(x)=2x & 0\le x \prec 4 \\ f(x)=-2x & x\prec 0 \end{cases}$$

a/ $f(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x\in\mathbb{R}^*$ $\quad -x\in\mathbb{R}^*$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*$

$$f(-x)=|-x|-\frac{1}{(-x)^2}=|x|-\frac{1}{x^2}=f(x)$$

إذن f دالة زوجية

b/ $f(x)=x^3+1$

$$f(1)=1^3+1=1+1=2 \qquad f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$$

ومنه $f(-1)\neq f(1)$

f دالة غير زوجية

c/ $\begin{cases} f(x)=2x & 0\le x\prec 4 \\ f(x)=-2x & x\prec 0\end{cases}$

$D_f=]-\infty;0[\cup[0;4[=]-\infty;4[$

نلاحظ أن $-6\in D_f$ و $6\notin D_f$ اذن f دالة غير زوجية

ب التمثيل المباني لدالة زوجية

f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;f(x))$ من C_f و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأراتيب .

ومنه $M'(-x;f(x))$

و حيث أن f زوجية فان $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

ومنه $M'(-x;f(-x))$ و بالتالي $M'\in C_f$

اذن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

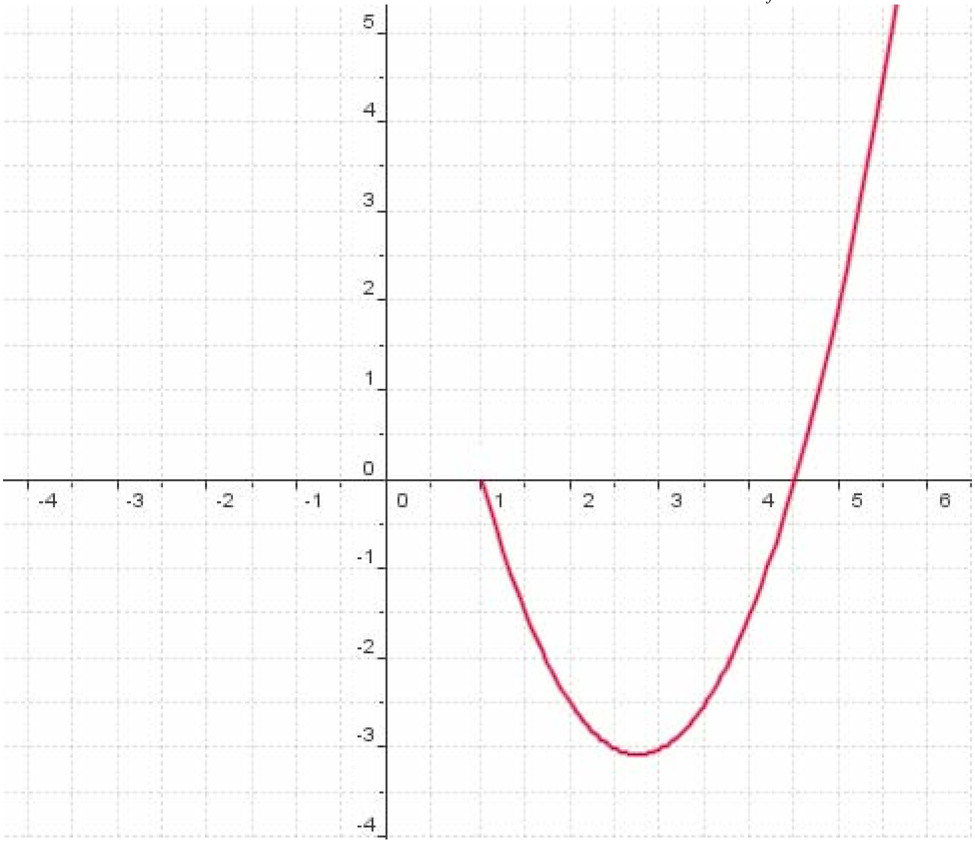
العكس
بين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب فان f دالة زوجية

خاصية

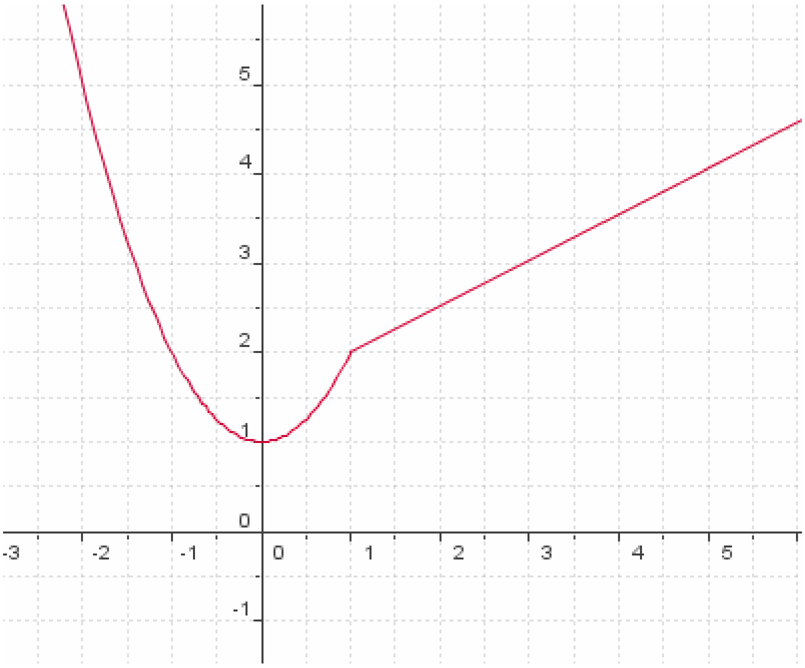
لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$
تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

تمرين

1- f دالة زوجية أتمم المنحنى C_f



2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x) = -f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية

$$f(x)=x^3+1 \quad (b \quad ; \quad f(x)=\frac{1}{x^3} \quad (a$$

$$\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases} \quad (c$$

$f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ /a

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x\in\mathbb{R}^*$ $\quad -x\in\mathbb{R}^*$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

$f(x)=x^3+1$ /b

$f(1)=1^3+1=1+1=2 \qquad f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

ومنه $f(-1)\neq -f(1)$

f دالة غير فردية

/c $\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$

$D_f=[-2;0[\cup[0;2]=[-2;2]$

لدينا لكل $x\in[-2;2]$ و $-x\in[-2;2]$

إذا كان $x\in]0;2]$ فان $-x\in[-2;0[$

و بالتالي $f(x)=-2x+1$ و $f(-x)=-2(-x)-1=2x-1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذا كان $x\in[-2;0[$ فان $-x\in]0;2]$

و بالتالي $f(x)=-2x-1$ و $f(-x)=-2(-x)+1=2x+1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذن لكل $x\in[-2;2]$ $\quad f(-x)=-f(x)$

إذن f دالة فردية

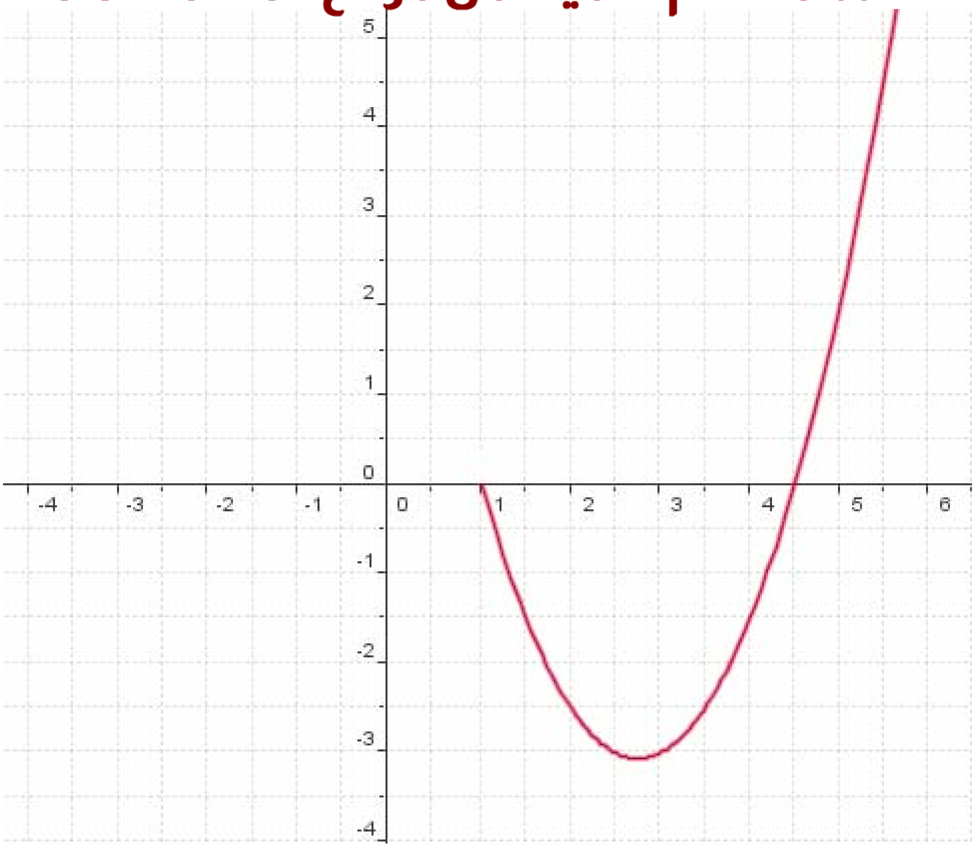
ب-التمثل المباني لدالة فردية

خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمرين

f دالة فردية أتمم المنحنى C_f



تمرين

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\frac{|x|+x^2}{x}$

حدد D_f وبين أن f فردية ثم أنشئ C_f

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

III- تغيرات دالة

1- منحى تغيرات دالة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \le f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \ge f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \succ f(x_2)$

مثال أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x)=-2x+1$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a \prec b$

ومنه $-2a \succ -2b$ و بالتالي $-2a+1 \succ -2b+1$ $f(a) \succ f(b)$

إذن f تناقصية قطعا

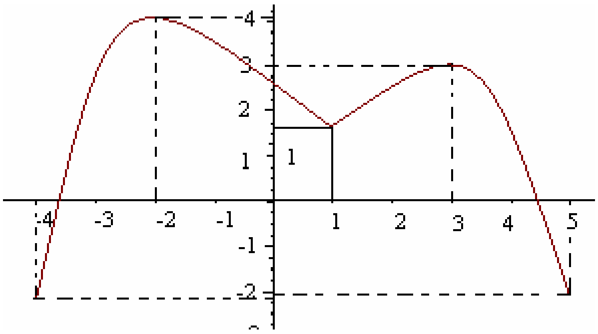
تمرين نعتبر $f(x)=|x-2|$

أدرس منحى تغيرات f على كل من $]-\infty;2]$ و $]2;+\infty[$

أنشئ C_f

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة f

على المجال $[-4;5]$ حدد تغيرات f



2- الدالة الرتيبة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f
نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما تزايدية علىI و إما تناقصية على I.

ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة f على مجال I يعني تجزيءI إلى مجالات تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

3- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفينمن D_f

العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

مثال نعتبر $f(x)=x^2-3x$

أحسب معدل تغيرات f بين 2 و 1-

ب- معدل التغير و الرتابة

بتوظيف التعريف نحصل على

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

تمرين

نعتبر $f(x)=x^2-4x-1$

أدرس رتابة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$; $]-\infty;2]$

و أعط جدول تغيرات f

الجواب

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{a^2-4a-1-b^2+4b+1}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)-4(a+b)}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b-4)}{a-b}=a+b-4$$

إذا كان a و b من $]2;+\infty[$ فان $a\succ 2$ و $b\succ 2$ ومنه $a+b\succ 4$ أي $a+b-4\succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $[2;+\infty[$

إذا كان a و b من $]-\infty;2]$ فان $a \le 2$ و $b \le 2$ ومنه $a+b \le 4$ أي $a+b-4 \le 0$

إذن f تناقصية على $]-\infty;2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

أدرس رتابة f

4- الرتابة وزوجية دالة

أ- خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

البرهان

لتكن f دالة زوجية و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من J

ومنه يوجد x_1' و x_2' من I حيث $x_1'=-x_1$ و $x_2'=-x_2$

$$\frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'}=\frac{f(-x_2)-f(-x_1)}{-x_2+x_1}=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

إذن تغيرات f على I عكس تغيرات f على J

أ- خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

VI- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I-\{a\}$ $f(x) \prec f(a)$
- نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I-\{a\}$ $f(x) \succ f(a)$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطاريف لدالة f

تمرين نعتبر $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1- أدرس زوجية f أحسب $f(1)$

2- بين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f إذا وجد

الجواب

1- ندرس زوجية f

$D_f=\mathbb{R}^*$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

إذن f فردية

حساب $f(1)=1+\frac{1}{1}=2$

2- نبين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

ليكن x من $]0;+\infty[$

$$f(x)-2=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن $x\succ 0$ و $(x-1)^2\geq 0$ فان $f(x)\geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f

من 1/ و 2/ نستنتج أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq f(1)$

اذن f تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن $x\in]-\infty;0[$ و منه $-x\in]0;+\infty[$ مما سبث نستنتج أن $f(-x)\geq f(1)$

و حيث f فردية فان $-f(x)\geq f(1)$ و بالتالي $f(x)\leq -f(1)$ أي $f(x)\leq f(-1)$

اذن f تقبل قيمة قصوى عند 1-

خاصة

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a\prec b\prec c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

V - دراسة تغيرات دالة – دراسة وضعية منحنيين

دراسة تغيرات دالة f يعني

– تحديد D_f

- دراسة رتابة f وتلخيصها في جدول التغيرات

دراسة وضع منحنيين مبيانيا

ليكن C_f و Cg منحنيين للدالتين f و g على التوالي

يكون $f(x)\succ g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f فو ق Cg في المجال I

يكون $f(x)\prec g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f تحت Cg في المجال I

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال I هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين C_f تحت Cg في المجال I

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=x^3-3x$

حدد مطاريف الدالة f

تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة f

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطاريف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}$$
$$=x+y-4$$

ب) نحدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن x و y من $[0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\le x\prec 2$ و $0\le y\prec 2$

و بالتالي $0\le x+y\prec 4$ أي $-4\le x+y-4\prec 0$

ومنه $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن f فردية فان f تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x \succ 2$ و $y \succ 2$

وبالتالي $x+y-4 \succ 0$ أي $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند 2- هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي 4-

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و 2-

تمرين2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ يكافئ $x^2-1 \neq 0$

تكافئ $x^2 \neq 1$

تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2- نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a\left(b^2-1\right)+b\left(a^2-1\right)}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)(a-b)}=\frac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}$$

3- نحدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\leq b\prec 1\ ;\ 0\leq a\prec 1$ و بالتالي $0\leq b^2\prec 1\quad et\quad 0\leq a^2\prec 1\quad et\quad 0\leq ab\prec 1$

ومنه $-1\leq b^2-1\prec 0\quad et\quad -1\leq a^2-1\prec 0\quad et\quad 1\leq ab+1\prec 2$

إذن $\frac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0]$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1\ ;\ a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1\quad et\quad 0\leq a^2\succ 1\quad et\quad ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0\quad et\quad a^2-1\succ 0\quad et\quad ab+1\succ 2$

إذن $\frac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

4- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\Vert$		$\nearrow$		$\Vert$	$\nearrow$	