

ملخص درس دراسة الدوال

I. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$)، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ ، يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D ، بحيث: $y = f(x)$
← y يسمى صورة x بالدالة f .
- ← العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

2. مجموعة تعريف دوال عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .
مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$.

ملاحظة 1: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f

ملاحظة 2: إذا كانت f دالة حدودية فان $D_f = \mathbb{R}$

(2) إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \sqrt{P(x)}$

فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

(3) إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$

فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

3. تساوي الدالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$ لكل x من D . و نكتب: $f = g$

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ غالبا يكون متعامدا منظمًا.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.
التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى بحيث: $y = f(x)$ و $x \in D$

5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.
نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:
❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .

❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = f(x)$

(ب) **الدالة الفردية:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها ونقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:
❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .

❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = -f(x)$

ت) التأويل المبياني

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأرتاب محور تماثل المنحنى C_f .

❖ تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f .

II. تغيرات دالة عددية:

1. **تعريف:** لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 < x_2$ فان $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I ، إذا وفقط إذا كان

لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1) = f(x_2)$
اعط مثال لدالة ثابتة

2. **جدول تغيرات دالة:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f

مجموعة تعريفها. دراسة منحنى تغيرات الدالة f ، يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعاً أو ثابتة. و نلخص نتائج هذه الدراسة في جدول، يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. رتابة دالة على مجال:

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I .
نقول إن f رتبية قطعاً على المجال I إذا كانت تزايدية قطعاً على I أو تناقصية قطعاً على I .

III. دراسة الدوال:

1. **الدالة:** $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$)

ملخص الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		↙ ↘	
		0	

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$ و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc \neq 0$ و $x \neq -\frac{d}{c}$

نقبل النتائج التالية: يوجد ثلاث أعداد: α و β و k بحيث:

$f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ ويسمى الشكل المختصر

❖ جدول تغيرات f : الحالة: $k > 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

الحالة: $k < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

❖ منحنى f يسمى هذلولاً مركزه $S(-\alpha; \beta)$ و مقاريه

$(D_1): x = -\alpha$ و $(D_2): y = \beta$

VI. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصراً من I

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط

إذا كان: $f(x) \leq f(a)$ لكل x من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا

كان: $f(x) \geq f(a)$ لكل x من I .

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على

المجال I .

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$

مطراف للدالة f .

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$) يسمى شلجماً.

النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلج. محور الأرتاب هو محور تماثل للمنحنى.

2. الدالة: $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

(3) ملخص: الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

التمثيل المبياني للدالة f : بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f

على $[0, +\infty[$ ثم ننتم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل

المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) يسمى هذلولاً مركزه O أصل

المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x = 0$ و $y = 0$.

IV. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث $a \neq 0$ و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث: $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

(الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجماً رأسه $S(-\alpha; \beta)$ و محوره

$(D): x = -\alpha$

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

V. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$