

القدرات المستهدفة

- التعبير عن المسافة و التعامد بواسطة الجداء السلمي.
- استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية.
- استعمال مبرهنة ألكاشي و مبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.

تمرين رقم 1:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3\sqrt{2}$ و $AC = 2\sqrt{2}$ و $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1 - أ - تحقق أن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$.

ب - أحسب المسافة BC .

ج - النقطة I هي منتصف القطعة $[BC]$. أحسب المسافة AI .

2 - لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A .

تصحيح التمرين رقم 1 :

ABC مثلثا بحيث $AB = 3\sqrt{2}$ و $AC = 2\sqrt{2}$ و $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1 - أ - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 2 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

ب - باستعمال مبرهنة ألكاشي : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(-6)$$

$$BC^2 = 18 + 8 + 12$$

$$BC^2 = 38$$

$$BC = \sqrt{38}$$

ج - باستعمال مبرهنة المتوسط $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

$$(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2AI^2 + \frac{(\sqrt{38})^2}{2}$$

$$18 + 8 = 2AI^2 + \frac{38}{2}$$

$$26 = 2AI^2 + 19$$

$$2AI^2 = 26 - 19$$

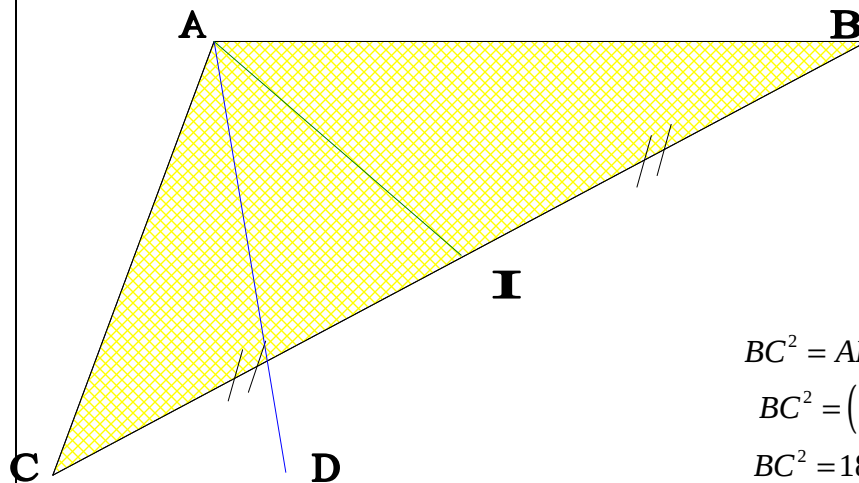
$$2AI^2 = 7$$

$$AI^2 = \frac{7}{2}$$

$$AI = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

2 - لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. لنحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$



$$= \frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{3} (3\sqrt{2})^2 - 6$$

$$= \frac{18}{3} - 6 = 6 - 6 = 0 \quad \text{وبما أن } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0 \text{ فإن المثلث } ABD \text{ قائم الزاوية في النقطة } A$$

تمرين رقم 2:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1 - أحسب : $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

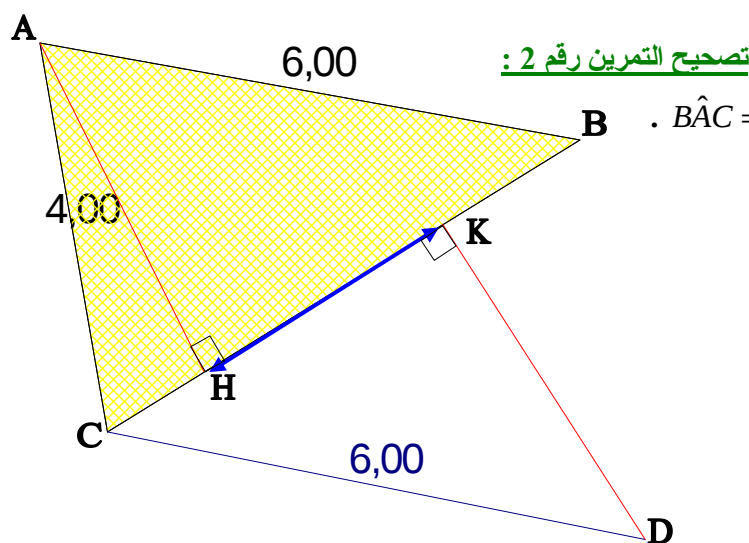
2 - أحسب المسافة BC .

3 - لتكن النقطة D بحيث $\overline{CD} = \overline{AB}$ و H و K على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين A و D على (BC) .

أ - بين أن : $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$

ب - بين أن $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -BC \times HK$

ج - استنتج قيمة المسافة HK .



تصحيح التمرين رقم 2 :

1 - لدينا ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad -2$$

$$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 12$$

$$BC^2 = 36 + 16 - 24 = 52 - 24 = 28$$

$$BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3 - أ - لدينا : باستعمال علاقة شال $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{BD})(\overline{BA} + \overline{AC})$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{AC})(-\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$$

ب - باستعمال الإسقاط لدينا

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{HK} \cdot \overline{BC} = -HK \times BC$$

ج - بما أن : $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$ و $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -BC \times HK$

$$-HK \times BC = AC^2 - AB^2 \quad \text{فإن :}$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = 4^2 - 6^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = -20$$

$$HK = \frac{10}{\sqrt{7}} \quad \text{إذن} \quad HK = \frac{-20}{-2\sqrt{7}}$$

تمرين رقم 3:

ليكن $ABCD$ مربع طول ضلعه 4.

النقطتان I و J هما منتصف القطعتين $[AD]$ و $[DC]$ على التوالي.

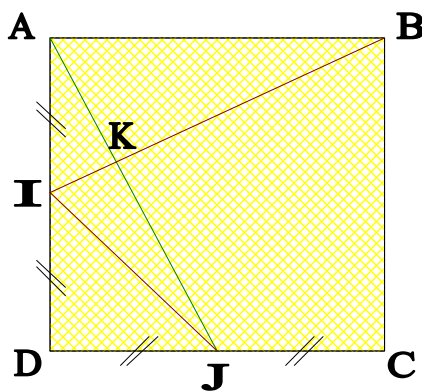
1 - أ - أحسب $\overline{DJ} \cdot \overline{BA}$ و $\overline{AD} \cdot \overline{AI}$.

ب - أحسب $\overline{AJ} \cdot \overline{BI}$ و استنتج أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين.

2 - أحسب $\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$.

3 - لتكن K هي نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (BI) بين أن : $BK - IK = \frac{6}{\sqrt{5}}$

تصحيح التمرين رقم 3 :



1 - أ - لدينا : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = AD \times AI = 4 \times 2 = 8$

ولدينا : $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} = -DJ \times BA = -2 \times 4 = -8$

ب - لدينا حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI})$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$= 0 + 8 - 8 + 0 = 0$$

بما أن $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ فإن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين .

2 - لنحسب المسافات IJ و IB و BJ .

$$BJ^2 = BC^2 + CJ^2$$

$$BJ^2 = 4^2 + 2^2$$

$$BJ^2 = 16 + 4$$

$$BJ^2 = 20$$

$$BJ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$IB^2 = IA^2 + AB^2$$

$$IB^2 = 2^2 + 4^2$$

$$IB^2 = 4 + 16$$

$$IB^2 = 20$$

$$IB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$IJ^2 = ID^2 + DJ^2$$

$$IJ^2 = 2^2 + 2^2$$

$$IJ^2 = 4 + 4$$

$$IJ^2 = 8$$

$$IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BJ^2 = IB^2 + IJ^2 - 2 \times IB \times IJ \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$$

بتطبيق مبرهنة ألكاشي :

$$(2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$$

$$20 = 20 + 8 - 8\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB})$$

$$8\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = 28 - 20$$

$$\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = 1$$

$$\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(BK - IK)(BK + IK) = BK^2 - IK^2$$

3 - لدينا :

$$BK - IK = \frac{BK^2 - IK^2}{BK + IK} \quad \text{إذن}$$

$$BK - IK = \frac{(AB^2 - AK^2) - (AI^2 - AK^2)}{BI}$$

$$BK - IK = \frac{AB^2 - AI^2}{BI} = \frac{4^2 - 2^2}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

تمرين رقم 4:

ABC مثلث بحيث AB = 4 و AC = 3 و $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{5}{6}$.

1 - أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

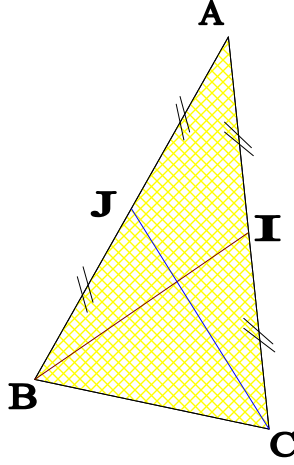
2 - أحسب المسافة BC.

3 - أ - لتكن I منتصف [AC] و J منتصف [AB].

بين أن : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2)$.

ب - استنتج أن المستقيمين (BI) و (CJ).

تصحيح التمرين رقم 4 :



1 - لدينا : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$= 4 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

2 - باستعمال مبرهنة ألكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 16 + 9 - 12 = 13$$

$$BC = \sqrt{13}$$

3 - أ - $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ})$

$$= \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$$

ب - لدينا : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$

$$= \frac{5}{4} \times 10 - \frac{1}{2}(4^2 + 3^2)$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{1}{2} \times 25$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{25}{2} = 0$$

إذن المستقيمان (BI) و (CJ) متعامدان .