



## المنهجية

ملخص لدروس: التحويلات الهندسية الاحتمالية في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

| محتوى البرنامج                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | القدرات المنتظرة                                                                                                                                                                         | توجيهات تربوية                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- تذكير: التماثل المحوري، التماثل المركزي، الإزاحة؛</li> <li>- التحاكي؛</li> <li>- الخاصية المميزة لكل من الإزاحة والتحاكي، حالة التماثل المركزي؛</li> <li>- الحفاظ على معامل استقامية متجهتين؛</li> <li>- المسافة والتحويلات السابقة؛</li> <li>- صور بعض الأشكال (قطعة، مستقيم، نصف مستقيم، دائرة، زاوية).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- التعرف على تقايس وتشابه الأشكال باستعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل.</li> <li>- استعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل في حل مسائل هندسية.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- يتم التذكير بالتماثل المحوري والتماثل المركزي والإزاحة من خلال أنشطة وتمارين وتعرفها متجهيا أو نألفيا.</li> <li>- يقدم التحاكي من خلال أمثلة وبنفس الطريقة التي قدمت به التحويلات السابقة.</li> <li>- تعتبر الصيغ التحليلية لهذه التحويلات خارج المقرر.</li> </ul> |

### I. تعاريف:

#### 1. التماثل المحوري:

ليكن  $(D)$  مستقيما من المستوى.

التماثل المحوري الذي محوره

$(D)$  هو التحويل المستوي  $S_{(D)}$  الذي

يربط كل نقطة من المستوى  $(P)$

بالنقطة  $M'$  حيث يكون  $(D)$  واسطا

للقطعة  $[MM']$ .

ملاحظة: إذا كانت  $M$  تنتمي إلى المستقيم  $(D)$  فإن  $S_{(D)}(M) = M$ .

$$S_{(D)}(N) = N' \quad S_{(D)}(M) = M'$$

#### 2. التماثل المركزي

لتكن  $O$  نقطة من

المستوى  $(P)$ . التماثل

المركزي الذي مركزه  $O$  هو التحويل المستوي  $S_O$  الذي

يربط كل نقطة  $M$  من المستوى  $(P)$  بالنقطة  $M'$  حيث تكون

النقطة  $O$  منتصف القطعة  $[MM']$ .

ملاحظة:  $S_O(O) = O$

$S_O(M) = M'$  تعني  $O$  منتصف القطعة  $[MM']$ .

#### 3. الإزاحة:

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعقدة من المستوى. الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}$

هي التحويل المستوي الذي

يربط كل نقطة  $M$  من

المستوى  $(P)$  بالنقطة  $M'$

حيث  $\vec{MM'} = \vec{u}$ .

$$t(N) = N' \quad \text{و} \quad t(M) = M'$$

**تمرين 1:** ليكن  $ABCD$  معيناً مركزه  $O$ ، و  $I$  منتصف  $[AB]$

و  $J$  منتصف  $[AD]$

(1) أنشئ الشكل.

(2) حدد  $S_O(A)$  و  $S_O(B)$  و  $S_O(O)$  و  $S_O((AB))$

$$(3) \quad S_{(AC)}(B) \quad \text{و} \quad S_{(AC)}(A) \quad \text{و} \quad S_{(AC)}(O) \quad \text{و} \quad S_{(AC)}([AB])$$

$$\text{و} \quad S_{(AC)}(I) \quad \text{و} \quad S_{(AC)}([OI])$$

$$(4) \quad \text{حدد} \quad t_{\vec{u}}(A) \quad \text{و} \quad t_{\vec{u}}(B) \quad \text{و} \quad t_{\vec{u}}([OB])$$

أجوبة:

(1)

(2)

$$S_O(A) = C$$

لأن:

$$OA = OC$$

$$S_O(B) = D$$

لأن:  $OB = OD$

$$S_O(O) = O$$

نقول النقطة  $O$

صامدة

• بحث عن  $S_O((AB))$ : صورة المستقيم  $(AB)$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} S_O(A) = C \\ S_O(B) = D \end{cases} \text{ إذن: } S_O((AB)) = (CD)$$

نلاحظ أن صورة متقيم بواسطة تماثل مركزي هو مستقيم يوازيه

(3)

$$S_{(AC)}(B) = D \quad \text{لأن: } (AC) \text{ واسطا للقطعة } [BD].$$

$$S_{(AC)}(A) = A \quad \text{لأن: كل النقط التي تنتمي الى } (AC) \text{ صامدة}$$

$$S_{(AC)}(O) = O \quad \text{لأن: } O \in (AC) \text{ وكل النقط التي تنتمي الى } (AC) \text{ صامدة}$$

$$S_{(AC)}([AB]) = [AD] \quad \text{لأن: } \begin{cases} S_{(AC)}(A) = A \\ S_{(AC)}(B) = D \end{cases}$$

$$S_{(AC)}(I) = J$$

$$\text{لدينا } I \text{ منتصف } [AB] \text{ و } [AB] \text{ منتصف } S_{(AC)}([AB]) = [AD] \text{ إذن}$$

$$S_{(AC)}(I) = J \text{ ومنه } S_{(AC)}([AD]) \text{ أي النقطة } J$$

$$S_{(AC)}([OI]) = [OJ]$$

الأستاذ: عثمانى نجيب

$$\begin{cases} S_{(AC)}(O) = O \\ S_{(AC)}(I) = J \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} S_{(AC)}((OI)) = (OJ) \end{cases} \text{ اذن } S_{(AC)}(O) = O$$

(4)

$$t_{\overline{BC}}(A) = D \text{ ومنه } \overline{AD} = \overline{BC} \text{ اذن } \overline{AD} = \overline{BC} \text{ معين اذن } ABCD$$

$$t_{\overline{IJ}}(B) = O$$

نعتبر المثلث  $ABD$  : لدينا  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف

$$[AD] \text{ اذن : } \overline{BD} = 2\overline{IJ} \text{ ونعلم أن } O \text{ منتصف } [BD]$$

$$\overline{BO} = \overline{OJ} \text{ ومنه } \overline{BD} = 2\overline{BO} \text{ اذن } \overline{BO} = \overline{OJ}$$

$$t_{\overline{IJ}}(B) = O$$

$$t_{\overline{IJ}}([OB]) = [OD]$$

$$\overline{BO} = \overline{OD} \text{ اذن } [BD] \text{ منتصف } O \text{ و } \overline{BO} = \overline{OJ}$$

$$\overline{OD} = \overline{OJ} \text{ أي : } t_{\overline{IJ}}(O) = D \text{ ونعلم أن : } t_{\overline{IJ}}(B) = O$$

$$\text{اذن : } t_{\overline{IJ}}([OB]) = [OD]$$

#### 4. التحاكي:

لتكن  $\Omega$  نقطة من المستوى و  $k$  عددا حقيقيا غير منعدم التحاكي  $h$  الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$  هو التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة  $M$  من المستوى  $(P)$  بالنقطة  $M'$

$$\text{حيث } \overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$$

ملاحظة: إذا كانت  $k = -1$  فان التحويل  $h$  هو تماثل مركزي مركزه  $\Omega$ .

$$h(M) = M' \text{ يعني أن النقط } \Omega \text{ و } M \text{ و } M' \text{ مستقيمات.}$$

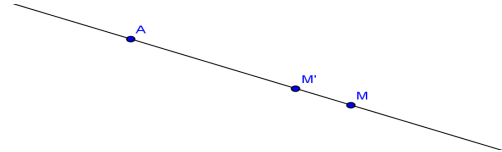
$$h(M) = M' \text{ يعني } \overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$$

$$h(N) = N' \text{ يعني } \overline{\Omega N'} = k\overline{\Omega N}$$

**تمرين 2:** لتكن  $A$  و  $M$  نقطتين من المستوى , أرسم النقطة

$$M' \text{ صورة النقطة } M \text{ بالتحاكي } h \text{ ذا المركز } A \text{ ونسبته } \frac{3}{4}$$

$$\text{الجواب : } h(M) = M' \text{ يعني } \overline{AM'} = \frac{3}{4}\overline{AM}$$



**تمرين 3:** عبر عن العلاقة المتجهية :  $\overline{IC} = -\frac{2}{3}\overline{IB}$  بتحاك

الجواب: إذا اعتبرنا  $h$  التحاكي الذي مركزه  $I$  ونسبته  $k = -\frac{2}{3}$

$$\text{أي : } h\left(I, -\frac{2}{3}\right) \text{ فان } \overline{IC} = -\frac{2}{3}\overline{IB} \text{ يعني } h(B) = C$$

**تمرين 4:** حدد نسبة و مركز التحاكي  $h$  الذي يحول  $A$  إلى  $B$  في الحالات التالية :

$$1. \overline{2IA} + 3\overline{AB} = \overline{0} \text{ حيث } I \text{ نقطة معلومة}$$

$$2. \overline{2\Omega B} = -\overline{BA} \text{ حيث } \Omega \text{ نقطة معلومة}$$

$$3. \overline{3IA} - 5\overline{AB} = \overline{0} \text{ حيث } I \text{ نقطة معلومة}$$

$$\text{الأجوبة : } h(I, k) \text{ يعني } h(A) = B \text{ يعني } \overline{IB} = k\overline{IA}$$

$$2\overline{IA} + 3\overline{AB} = \overline{0} \quad (1)$$

$$2\overline{IA} + 3\overline{AI} + 3\overline{IB} = \overline{0} \text{ يعني } 2\overline{IA} + 3(\overline{AI} + \overline{IB}) = \overline{0} \text{ يعني}$$

$$-\overline{IA} + 3\overline{IB} = \overline{0} \text{ يعني } 2\overline{IA} - 3\overline{IA} + 3\overline{IB} = \overline{0}$$

$$\text{يعني } \overline{IB} = \frac{1}{3}\overline{IA} \text{ ومنه } h\left(I, \frac{1}{3}\right)$$

$$2\overline{\Omega B} = -\overline{BA} \quad (2)$$

$$\text{يعني } 2\overline{\Omega B} = \overline{AB} \text{ يعني } 2\overline{\Omega B} = \overline{AB}$$

$$\text{يعني } 2\overline{\Omega B} - \overline{\Omega B} = -\overline{\Omega A} \text{ يعني } \overline{\Omega B} = -\overline{\Omega A}$$

$$\text{ومنه } h(\Omega, -1)$$

$$3\overline{IA} - 5\overline{AB} = \overline{0} \quad (3)$$

$$3\overline{IA} - 5\overline{AI} - 5\overline{IB} = \overline{0} \text{ يعني } 3\overline{IA} - 5(\overline{AI} + \overline{IB}) = \overline{0}$$

$$\text{يعني } 8\overline{IA} = 5\overline{IB} \text{ يعني } 3\overline{IA} + 5\overline{IA} - 5\overline{IB} = \overline{0}$$

$$\text{يعني } \overline{IB} = \frac{8}{5}\overline{IA} \text{ ومنه } h\left(I, \frac{8}{5}\right)$$

#### II. الخاصيات المميزة لكل من التحاكي و الإزاحة و التماثل المركزي

ليكن  $T$  تحويلا اعتياديا في المستوى و  $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

**تمرين 5:** ليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$

ويحول  $M$  إلى  $M'$  و يحول  $N$  إلى  $N'$

$$\text{بين أن : } \overline{M'N'} = k\overline{MN}$$

الجواب :

$$h(M) = M' \text{ يعني } \overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$$

$$h(N) = N' \text{ يعني } \overline{\Omega N'} = k\overline{\Omega N}$$

$$\overline{M'N'} = \overline{M'\Omega} + \overline{\Omega N'} = -\overline{\Omega M'} + \overline{\Omega N'}$$

$$\overline{M'N'} = -k\overline{\Omega M} + k\overline{\Omega N} = k(-\overline{\Omega M} + \overline{\Omega N})$$

$$\overline{M'N'} = k(\overline{M\Omega} + \overline{\Omega N}) = k\overline{MN}$$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

#### خاصية: (الخاصية المميزة للتحاكي)

يكون التحويل  $T$  تحاكيا نسبته  $k$  إذا وفقط إذا كان :  $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$

$$\text{بحيث : } T(M) = M' \text{ و } T(N) = N'$$

**تمرين 6:** ليكن  $t_{\overline{u}}$  الإزاحة ذات المتجهة  $\overline{u}$  بحيث تحول  $M$  إلى

$$M' \text{ و تحول } N \text{ إلى } N'$$

$$\text{بين أن : } \overline{M'N'} = \overline{MN}$$

$$\text{الجواب : } t_{\overline{u}}(M) = M' \text{ يعني } \overline{MM'} = \overline{u} \text{ و } t_{\overline{u}}(N) = N' \text{ يعني } \overline{NN'} = \overline{u}$$

$$\text{ومنه : } \overline{MM'} = \overline{NN'} \text{ اذن : } \overline{MM'N'N} \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$\text{وبالتالي : } \overline{M'N'} = \overline{MN}$$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

#### خاصية: (الخاصية المميزة للإزاحة)

يكون التحويل  $T$  إزاحة إذا وفقط إذا كان :  $\overline{M'N'} = \overline{MN}$  بحيث :

$$T(M) = M' \text{ و } T(N) = N'$$

ملاحظة: بما أن التماثل المركزي هو تحاكي نسبته  $k = -1$  نحصل

على الخاصية التالية :

#### خاصية: (الخاصية المميزة للتماثل المركزي)

يكون التحويل  $T$  تماثلا مركزيا إذا وفقط إذا كان :

$$\overline{M'N'} = -\overline{MN} \text{ بحيث : } T(M) = M' \text{ و } T(N) = N'$$

نشاط :  $h(O; 2)$  أرسم  $h(M) = M'$  و  $h(N) = N'$  ماذا تلاحظ؟

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المسافة باستثناء التحاكي الذي نسبته  $k$  بحيث  $|k| \neq 1$ .

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المنتصف.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على الاستقامية و التوازي و التعامد و قياس الزوايا الهندسية.

#### IV. صور بعض الأشكال:

❖ صورة مستقيم  $(\Delta)$  بواسطة إزاحة أو تماثل مركزي أو تحاك هو مستقيم  $(\Delta')$  يوازي  $(\Delta)$ .

❖ صورة قطعة  $[AB]$  هي قطعة  $[A'B']$  تقايس  $[AB]$  إذا كان التحويل إزاحة أو تماثل. أما إذا كان التحويل تحاكيا نسبته  $k$  فإن  $A'B' = |k| AB$ .

❖ صورة دائرة  $(E)$  ذات المركز  $c$  و الشعاع  $r$  هي دائرة مركزه  $c'$  صورة  $c$  و شعاعها  $r$  إذا كان التحويل إزاحة أو تماثل و شعاعها  $|k| \cdot r$  إذا كان التحويل تحاكيا نسبته  $k$ .

❖ صورة الزاوية  $[AOB]$  هي الزاوية  $[A'O'B']$

$$\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$$

حيث  $A'$  و  $B'$  و  $O'$  هي صور  $A$  و  $B$  و  $O$  على التوالي بالتحويل.

**تمرين 7:** ليكن  $ABCD$  متوازي الأضلاع و  $I$  و  $J$  نقطتين

معرفتين ب  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$ .

(1) أنشئ الشكل.

(2) بين أن  $(BJ)$  صورة  $(AI)$  بالإزاحة  $t_{AB}$ . وماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين  $(BJ)$  و  $(AI)$ ؟

(3) نعتبر التحاكي  $h$  ذا المركز  $I$  و الذي يحاول  $B$  إلى  $C$ .  
(أ) بين أن  $h((AB)) = (CD)$ .

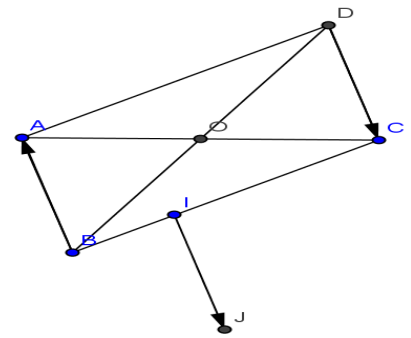
(ب) أثبت أن نسبة  $h$  هي العدد -2.

(4) لتكن  $K$  نقطة حيث  $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$ .

(أ) بين أن  $h(J) = K$ .

(ب) أثبت أن  $AI = \frac{1}{2} CK$ .

(الاجوبة: 1)



(2) نبين أن :  $t_{AB}(I) = J$  ؟؟؟؟

لدينا  $ABCD$  متوازي الأضلاع إذن  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

ولدينا حسب المعطيات :  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$

ومنه  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$  أي :  $t_{AB}(I) = J$

ولدينا :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$  إذن  $t_{AB}(A) = B$

لدينا إذن :  $t_{AB}(I) = J$  وبالتالي :  $t_{AB}((AI)) = (BJ)$

❖ الاستنتاج: نعلم أن صورة مستقيم بواسطة إزاحة هو مستقيم يوازيه إذن  $(AI) \parallel (BJ)$

(3) (أ) لدينا حسب المعطيات :  $h(B) = C$

ونعلم أن صورة المستقيم  $(AB)$  بواسطة تحاك هو مستقيم يوازيه ويمر من صورة  $B$  أي يمر من  $C$

إذن هو المستقيم  $(CD)$

وبالتالي :  $h((AB)) = (CD)$

(3) (ب)  $h(B) = C$  يعني  $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$

ونعلم حسب المعطيات أن :  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$  يعني  $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}$

يعني  $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IB}$  يعني  $3\overrightarrow{CI} = 2(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB})$

يعني  $3\overrightarrow{CI} - 2\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$  يعني  $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$

يعني  $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$  ومنه  $k = -2$

(5) (أ)  $h(J) = K$  ؟؟؟؟

ونعلم حسب المعطيات أن :  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$  وأن :  $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$

إذن :  $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IJ}$  يعني  $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{IJ}$

وهذا يعني أن :  $h(J) = K$

(أ) وجدنا إذن :  $h(J) = K$  إذن :  $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{BJ}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

ومنه بالمرور الى المنظم نجد :

$$\|\overrightarrow{CK}\| = |-2| \|\overrightarrow{BJ}\| \quad \text{إذن : } \|\overrightarrow{CK}\| = \|\overrightarrow{2BJ}\|$$

إذن :  $CK = 2BJ$

وجدنا  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$  إذن :  $ABJI$  متوازي الأضلاع إذن

$AI = \frac{1}{2} CK$  يعني  $CK = 2AI$  إذن :  $BJ = AI$

#### V. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين:

ليكن  $T$  تحويلا اعتياديا في المستوى و  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقط و  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  صورهم بالتحويل  $T$

إذا كان :  $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$  فإن :  $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$

**تمرين 8:** ليكن  $ABC$  مثلثا و  $I$  منتصف  $[BC]$

نعتبر النقطتين  $B'$  و  $C'$  بحيث :  $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$

و ليكن  $J$  منتصف  $[B'C']$

وليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه  $A$  نسبته  $k = \frac{2}{3}$

(1) بين أن  $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

(2) باستعمال التحاكي  $h$  بين أن النقط  $J$  و  $A$  و  $I$  نقط مستقيمة

(الأجوبة: 1)  $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  يعني :  $h(B) = B'$

$\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$  يعني :  $h(C) = C'$  إذن :  $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

(2) لدينا  $I$  منتصف  $[BC]$  إذن :  $h(I)$  منتصف  $[B'C']$

وبما أن  $J$  منتصف  $[B'C']$  فإن :  $h(I) = J$   
ومنه : النقط  $J$  و  $A$  و  $I$  نقط مستقيمية انتهى الدرس

ملاحظات عامة حول الدرس

