

تمرين 1

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر $\frac{267\pi}{6}$ و $-\frac{238\pi}{3}$ الأضولين المنحنيين للنقطتين A و B . لتكن C نقطة حيث $[2\pi]$ $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$.

1- حدد الأضولين المنحنيين الرئيسيين للنقطتين A و B
 2- حدد القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ثم حدد $\cos(\widehat{OA; OB})$

3- حدد القياس الرئيسي $\widehat{(OC; OB)}$

4- مثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية

تمرين 2

1- أحسب $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$

2- علما أن $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ حدد $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$ و $\cos \frac{7\pi}{8}$

تمرين 3

1- بسط $C = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(3\pi + x)$

2- بين أن $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$

الحل

تمرين 1

1- نحدد الأضولين المنحنيين الرئيسيين للنقطتين A و B

لدينا $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$ و $\frac{267\pi}{6} = 2 \times 22\pi + \frac{\pi}{2}$ حيث $\frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$

إذن $\frac{\pi}{2}$ الأضول المنحني الرئيسي للنقطة A

لدينا $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$ و $-\frac{238\pi}{3} = 2 \times -40\pi + \frac{2\pi}{3}$ حيث $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$

إذن $\frac{2\pi}{3}$ الأضول المنحني الرئيسي للنقطة B

2- نحدد القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ثم نحدد $\cos(\widehat{OA; OB})$

$\frac{\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$ و $\widehat{(OA; OB)} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

إذن $\frac{\pi}{6}$ القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ومنه $\cos(\widehat{OA; OB}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي $\widehat{(OC; OB)}$

لدينا $[2\pi]$ $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \left(\widehat{OC;OA}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = -\left(\widehat{OA;OC}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

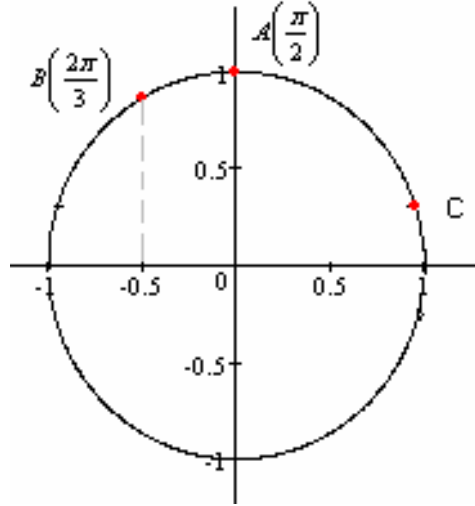
$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{42\pi}{5} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{257\pi}{30} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{17\pi}{30} + 8\pi + 2k\pi = \frac{17\pi}{30} + 2(4+k)\pi$$

وحيث $\frac{17\pi}{30} \in]-\pi; \pi]$ فان $\frac{17\pi}{30}$ هي القياس الرئيسي $\left(\widehat{OC;OB}\right)$

4- نمثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية



تمرين 2

1- نحسب A و B

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

$$\cos^2 \frac{7\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8}$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \cos^2 \frac{3\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos \frac{3\pi}{8}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{و بالتالي}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) = 2 \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

ومنه

$$A + B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = 4 - A = 4 - 2 = 2 \quad \text{اذن} \quad A + B = 4 \quad \text{و بالتالي}$$

$$-2 \text{ نحدد } \cos \frac{7\pi}{8} \text{ و } \sin \frac{\pi}{8} \text{ و } \cos \frac{\pi}{8}$$

$$1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} \text{ نعلم أن } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ لدينا}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ ومنه}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ و } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ فإن } \frac{\pi}{8} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\text{ وحيث أن}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ و } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

تمرين 3

$$C = \sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos \left(\frac{27\pi}{2} - x \right) \cdot \sin(3\pi + x) \text{ 1- نبسط}$$

$$\sin(3\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x \text{ لدينا}$$

$$\cos \left(\frac{27\pi}{2} - x \right) = \cos \left(14\pi - \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x \text{ و}$$

$$\cos(7\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ و}$$

$$\sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x \text{ و}$$

$$C = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ إذن}$$

$$-2 \text{ نبين أن } \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1 \end{aligned}$$