

الحساب المثلثي

ملخص الدرس

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

وحدات قياس الزوايا

(C) دائرة مركزها O و شعاعها 1.

I و M نقطتان منها.

قياس الزاوية $I\hat{O}M$ بالراديان هو طول القوس IM

الراديان

قياس زاوية مستقيمة بالغراد هو 200 غراد

الغراد

$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$$

إذا كان : x قياس زاوية هندسية $I\hat{O}M$ بالدرجة
و y قياسها بالراديان
و z قياسها بالغراد

الدائرة المثلثية

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الدائرة المثلثية هي دائرة : - مركزها O أصل المعلم

- شعاعها 1

- مزودة بنقطة أصل I

- موجهة توجيها موجبا

الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

(C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. وليكن x عددا حقيقيا

• إذا كان $x \geq 0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون x هو قياس $I\hat{O}M$ بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى الموجب على (C)

• إذا كان $x < 0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون $-x$ هو قياس $I\hat{O}M$ بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى السالب على (C)

- العدد x يسمى في الحالتين أفصولا منحنيا للنقطة M على (C) و مكتب $M(x)$

- إذا كان $x \in]-\pi, \pi]$ نقول إن x هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M و هو وحيد.

- الأعداد $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هي أفاصيل منحنية للنقطة M على (C) , أي أن $M(x)$ و $M(x + 2k\pi)$ منطبقان

الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين - الزاوية الموجهة لمتجهتين

- ليكن $[Ox)$ و $[Oy)$ نصفي مستقيمين.
الزوج $([Ox), [Oy)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين و نرمز لها بالرمز (Ox, Oy)
الزوج $([Oy), [Ox)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين و نرمز لها بالرمز (Oy, Ox)
- (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I حيث $I \in [Ox)$ و M نقطة تقاطع (C) و $[Oy)$
و ليكن x أقصولا منحنيا للنقطة M .
العدد الحقيقي x يسمى قياسا للزاوية الموجهة (Ox, Oy) نرمز له بالرمز $(\overline{Ox, Oy})$
و نكتب : $(\overline{Ox, Oy}) = x$. لدينا كذلك $(\overline{Ox, Oy}) = x + 2k\pi$ (لأن $x + 2k\pi$ أيضا أقصول منحنيا للنقطة M)
- $\vec{u}$ متجهة موجهة لـ $[Ox)$ و $\vec{v}$ متجهة موجهة لـ $[Oy)$
الزاوية الموجهة للمتجهتين المحددة بالزوج $(\vec{u}, \vec{v})$ هي الزاوية الموجهة (Ox, Oy) و نرمز لها بالرمز $(\vec{u}, \vec{v})$
و لدينا : $(\overline{Ox, Oy}) = (\vec{u}, \vec{v})$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } (\vec{u}, \vec{u}) &= 2k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ (\vec{u}, \vec{v}) &= -(\vec{v}, \vec{u}) + 2k\pi \\ (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \quad (\text{علاقة شال}) \end{aligned}$$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ممنظم و (C) دائرة مثلثية مركزها O وإصلها I حيث $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصيلها المنحنية هو x

- أفصول النقطة M يسمى **جيب تمام** x ونرمز له بـ : $\cos x$
- أرتوب النقطة M يسمى **جيب** x ونرمز له بـ : $\sin x$

$M(\cos x; \sin x)$

ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$ و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصيلها المنحنية هو x

ليكن (Δ) المماس للدائرة (C) عند النقطة I و T تقاطع (OM) و (Δ)

- أفصول النقطة T على (Δ) يسمى **ظل** x ونرمز له بـ : $\tan x$
- $|\tan x| = IT$
- نعرف كذلك ظل عدد حقيقي x بـ : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

جدول القيم الاعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

خاصيات

لكل x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ لدينا :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \end{aligned}$$

لكل x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ لدينا :

$$\begin{aligned} \tan(x + k\pi) &= \tan x \\ -\tan x &= \tan(-x) \end{aligned}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ و k من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$$\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \\ \cos x &= \cos(-x) \\ -\sin x &= \sin(-x) \end{aligned}$$

علاقات مثلثية

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan x}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
--	--	---	---

المعادلات المثلثية

ليكن a عددا حقيقيا

$$\tan x = a$$

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\tan \alpha = a$ و $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a \notin [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R} (S = \emptyset)$

إذا كان $a = 1$ فإن : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

إذا كان $a = -1$ فإن : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

إذا كان $a \in]-1, 1[$ فإنه يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin \alpha = a$ و لدينا : $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a \notin [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R} (S = \emptyset)$

إذا كان $a = 1$ فإن : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a = -1$ فإن : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a \in]-1, 1[$ فإنه يوجد عدد α وحيد من $]0, \pi[$ حيث $\cos \alpha = a$ و لدينا : $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

المتراجحات المثلثية

(انظر الأمثلة و التمارين)