

## الهندسة

مذكرة رقم 9 : ملخص لدروس : الحساب المثلثي 1 مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

| توجيهات تربوية                                                                                                                            | القدرات المنتظرة                                                                                                                                                             | محتوى البرنامج                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>- تحدد نقطة من الدائرة المثلثية بأفصولها المنحني الرئيسي أو بإحداثياتها بالنسبة للمعلم المتعاقد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية.</p> | <p>- استعمال الآلة الحاسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة لزاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.</p> <p>- التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات</p> | <p><b>الجزء الأول:</b></p> <p>- الدائرة المثلثية، الأفاصيل المنحنية لنقطة، الأفصول المنحني الرئيسي؛</p> <p>- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل؛</p> <p>- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل، القياس الرئيسي، علاقة شال؛</p> <p>- العلاقة بين الدرجة والراديان والغراد؛</p> <p>- الزاوية الموجهة لمتجهتين وقياسها؛</p> <p>- النسب المثلثية لعدد حقيقي والنسب المثلثية لزاوية متجهتين؛</p> <p>- العلاقة : <math>\cos^2 x + \sin^2 x = 1</math> : <math>\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x</math> ، <math>\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}</math></p> <p>- النسب المثلثية لزاوية قياسها: <math>0</math> ، <math>\frac{\pi}{6}</math> ، <math>\frac{\pi}{4}</math> ، <math>\frac{\pi}{3}</math> ، <math>\frac{\pi}{2}</math> ؛</p> <p>- العلاقات بين النسب المثلثية لزاويتين مجموع أو فرق قياسيهما يساوي: <math>0</math> ، <math>\frac{\pi}{2}</math> ، <math>\pi</math> ، <math>2\pi</math> .</p> |

(2) أ) حساب القياس بالراديان:  $\frac{120}{180} = \frac{\gamma}{\pi}$  يعني  $120 \times \pi = \gamma \times 180$

يعني  $\gamma = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{12 \times \pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

ب) حساب القياس بالغراد:  $\frac{120}{180} = \frac{\beta}{200}$  يعني  $120 \times 200 = \beta \times 180$

يعني  $\beta = \frac{120 \times 200}{180} = 133,33 \text{ grad}$

### 3. الأفاصيل المنحنية لنقطة والأفصول المنحني الرئيسي:

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها A ومركزها O، و M نقطة من (C).

ليكن  $\alpha$  طول القوس الهندسية  $\widehat{IM}$   $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

العدد  $\alpha$  يسمى أفصول منحني للنقطة M. الأعداد الحقيقية  $\alpha + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي أفاصيل منحنية للنقطة M. يوجد أفصول

منحني وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال  $]-\pi, \pi]$  يسمى الأفصول

المنحني الرئيسي للنقطة M.

**تمرين 2:** أو مثال: مثل على الدائرة المثلثية للنقط التالية:  $A(0)$  و

$B\left(\frac{\pi}{2}\right)$  و  $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$  و  $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$  و  $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$  و  $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  و  $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  و  $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$  و  $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  و  $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

**أجوبة:**  $4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$  وبما أن:  $-\pi < -\frac{\pi}{2} \leq \pi$

فان:  $-\frac{\pi}{2}$  هو أفصول منحني رئيسي للنقطة  $M_0$

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

**طريقة 1:** نقسم العدد 2007 على 4 فنجد 501,75 ونأخذ أقرب عدد صحيح له أي 502

$\frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

يعني  $\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi$

وبما أن:  $-\pi < -\frac{\pi}{4} \leq \pi$  فان:  $-\frac{\pi}{4}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي

للنقطة I

**طريقة 2:**  $-\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$  و  $k \in \mathbb{Z}$  يعني  $-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1$

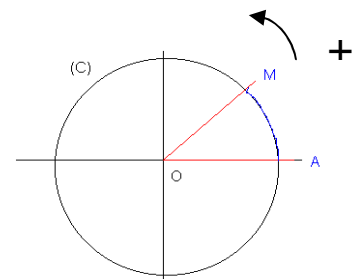
يعني  $-\frac{2007}{4} < 2k \leq -\frac{2003}{4}$  يعني  $-1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq -1 - \frac{2003}{4}$

لتكن (C) دائرة من المستوى (P) مركزها O، و I و M نقطتين من (C). لدينا منحنيين للوصول إلى النقطة M انطلاقاً من I. أحدهما موجب والآخر سالب.

لقد تم اختيار المنحني الموجب هو المنحني المضاد لحركة عقربي الساعة (المنحني + المشار إليه في الشكل) و يسمى المنحني المثلثي.

### 1. الدائرة المثلثية:

الدائرة المثلثية هي كل دائرة شعاعها 1 مزودة بأصل و موجهة توجيهها موجباً.



### 2. تعريف الراديان :

الراديان هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر على الدائرة (C) قوساً طوله 1 ونرمز له بالرمز : rad ملاحظة : قياس زاوية مستقيمة بالدرجة 180° والغراد 200 و بالراديان  $\pi$

اذن وجدنا ثلاث وحدات لقياس الزوايا ( الدرجة والغراد والراديان) ويمكن استعمال الطريقة الثلاثية للتحويل من وحدة الى أخرى أو استعمال النتيجة التالية : **نتيجة :** اذا كانت  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  قياسات زاوية بالدرجة و

الغراد والراديان على التوالي فان :  $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\gamma}{\pi}$

### تمرين 1:

1. لتكن زاوية قياسها بالدرجة 135° حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد

2. لتكن زاوية قياسها بالدرجة 120° حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد

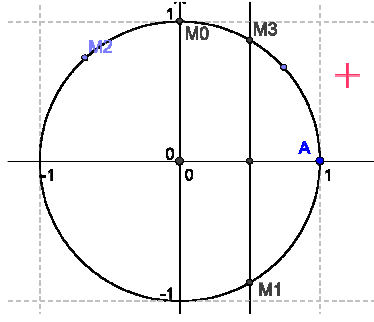
**أجوبة:** (1) أ) حساب القياس بالراديان:  $\frac{135}{180} = \frac{\gamma}{\pi}$  يعني  $135 \times \pi = \gamma \times 180$

يعني  $\gamma = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{27 \times \pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

ب) حساب القياس بالغراد:  $\frac{135}{180} = \frac{\beta}{200}$  يعني  $135 \times 200 = \beta \times 180$

يعني  $\beta = \frac{135 \times 200}{180} = 150 \text{ grad}$

فان :  $\frac{\pi}{3}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_3$



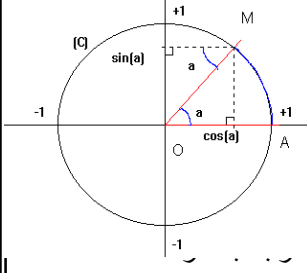
#### 4. الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم:

كل زوج  $([OA], [OB])$  من نصفي مستقيم يحدد الزاوية الموجهة المرموز إليها ب:  $(\widehat{OA, OB})$  أنظر الشكل.

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  أفصولين منحنيين للنقطتين  $A$  و  $B$  على التوالي. الأعداد الحقيقية  $\beta - \alpha + 2k\pi$

حيث  $k \in \mathbb{Z}$  هي قياسات للزاوية الموجهة  $(\widehat{OA, OB})$  ونكتب:  $(\widehat{OA, OB}) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$

للزاوية الموجهة  $(\widehat{OA, OB})$  قياس وحيد في المجال  $]-\pi, \pi]$  يسمى القياس الرئيسي للزاوية.



#### 5. النسب المثلثية لعدد حقيقي:

لتكن  $(C)$  دائرة مثلثية أصلها  $A$  ومركزها  $O$  وتكن  $B$  نقطة من  $(C)$

حيث:  $(\widehat{OA, OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$(0, \widehat{OA, OB})$  هو المعلم المتعامد المنظم

المثلثية  $(C)$  لتكن  $M \in (C)$  حيث  $(\widehat{OA, OM}) \equiv a [2\pi]$

أفصول النقطة  $M$  يسمى جيب تمام  $a$  ويكتب  $\cos a$ .

أرتوب النقطة  $M$  يسمى جيب  $a$  ويكتب  $\sin a$ .

إذا كان  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  أو  $AT$  أو  $-AT$ : ظل  $a$  ويكتب  $\tan a$ .

#### خصائص:

|                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$                                       |
| لكل $x$ من $\mathbb{R}$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$                                                                |
| لكل $k \in \mathbb{Z}$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$                                                                 |
| لكل $x$ من $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ لدينا: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| $\tan(x + k\pi) = \tan x$                                                                                         |

• إذا كانت  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  فان  $\cos x \geq 0$

• إذا كانت  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  فان  $\cos x \leq 0$

• إذا كانت  $0 \leq x \leq \pi$  فان  $\sin x \geq 0$

• إذا كانت  $\pi \leq x \leq 2\pi$  فان  $\sin x \leq 0$

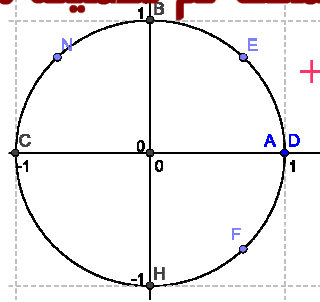
#### 6. العلاقات بين النسب المثلثية لعدد:

• لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

**تمرين 4:** بين أن: لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$   $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

الجواب:  $1 + (\tan x)^2 = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

ونعلم أن:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  إذن ①



يعني  $-\frac{2003}{8} < k \leq \frac{2011}{8}$

يعني  $-251,3 \leq k \leq \frac{2011}{8}$

اذن:  $k = -251$  ومنه

$$\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه:  $\frac{\pi}{4}$  هو الأفصول المنحني

الرئيسي للنقطة  $I$

**تمرين 3:** حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقط التالية ومثلهم على

الدائرة المثلثية:  $M_0(\frac{9\pi}{2})$  و  $M_1(\frac{11\pi}{3})$  و  $M_2(\frac{67\pi}{4})$  و  $M_3(\frac{19\pi}{3})$

أجوبة: (1) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_0$

**طريقة 1:**  $\frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi + \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$  وبما أن:  $-\pi < \frac{\pi}{2} \leq \pi$

فان:  $\frac{\pi}{2}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_0$

**طريقة 2:**  $-\pi < \frac{9\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi$  يعني  $k \in \mathbb{Z}$  و  $-1 < \frac{9}{2} + 2k \leq 1$

يعني  $-1 - \frac{9}{2} < -\frac{9}{2} + 2k \leq 1 - \frac{9}{2}$  يعني  $-\frac{11}{2} < 2k \leq -\frac{7}{2}$

يعني  $-\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4}$  يعني  $-\frac{11}{4} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq -\frac{7}{4} \times \frac{1}{2}$

يعني  $-2,7 < k \leq -1,7$

اذن:  $k = -2$  ومنه  $\alpha = \frac{9\pi}{2} + 2(-2)\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

ومنه:  $\frac{\pi}{2}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_0$

(2) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_1$

**طريقة 1:**  $\frac{67\pi}{4} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2 \times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$  وبما أن:

$-\pi < \frac{\pi}{3} \leq \pi$  فان:  $\frac{\pi}{3}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_1$

**طريقة 2:**  $-\pi < \frac{11\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  يعني  $k \in \mathbb{Z}$  و  $-1 < \frac{11}{3} + 2k \leq 1$

يعني  $-1 - \frac{11}{3} < -\frac{11}{3} + 2k \leq 1 - \frac{11}{3}$  يعني  $-\frac{14}{3} < 2k \leq -\frac{8}{3}$

يعني  $-\frac{14}{3} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq -\frac{8}{3} \times \frac{1}{2}$  يعني  $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3}$  يعني  $-\frac{7}{3} < k \leq -1,3$

اذن:  $k = -2$  ومنه  $\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

ومنه:  $-\frac{\pi}{3}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_1$

(3) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_2$

**طريقة 1:**  $\frac{67\pi}{4} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2 \times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$  وبما أن:  $-\pi < \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

فان:  $\frac{3\pi}{4}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_2$

**طريقة 2:**  $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$  يعني  $k \in \mathbb{Z}$  و  $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$

يعني  $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$  يعني  $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$

يعني  $-\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8}$  يعني  $-\frac{71}{8} \times \frac{1}{2} < 2k \times \frac{1}{2} \leq -\frac{63}{8} \times \frac{1}{2}$

يعني  $-8,8 < k \leq -7,8$

اذن:  $k = -8$  ومنه  $\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

ومنه:  $\frac{3\pi}{4}$  هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_2$

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة  $M_3$

$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 3\pi + \frac{\pi}{3}$

وبما أن:  $-\pi < \frac{\pi}{3} \leq \pi$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{6} = \cos \left( \frac{12\pi + \pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( 2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{53\pi}{6} = \sin \left( \frac{54\pi - \pi}{6} \right) = \sin \left( \frac{54\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( 9\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( 8\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \frac{53\pi}{6} = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{34\pi}{3} = \cos \left( \frac{33\pi + \pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{33\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 11\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 10\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{34\pi}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \left( \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left( \frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\tan \frac{37\pi}{4} = \tan \left( \frac{36\pi + \pi}{4} \right) = \tan \left( \frac{36\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left( 9\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left( \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

**تمرين 8:** بسط التعبيرات التالية :

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \times \cos(\pi - x) \quad 1.$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} \quad 2.$$

$$C = \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) - \tan \left( \frac{5\pi}{6} \right) \quad 3.$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x) \quad 4.$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) \quad 5.$$

$$F = \cos^2 \left( \frac{\pi}{5} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi}{10} \right) \quad 6.$$

$$G = \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{7} \right) + \cos \left( \frac{3\pi}{7} \right) + \cos \left( \frac{4\pi}{7} \right) + \cos \left( \frac{5\pi}{7} \right) + \cos \left( \frac{6\pi}{7} \right) \quad 7.$$

$$H = \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi}{8} \right) + \sin^2 \left( \frac{5\pi}{8} \right) + \sin^2 \left( \frac{7\pi}{8} \right) \quad 8.$$

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \times \cos(\pi - x) \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$A = \sin(x) \times \sin(x) - \cos(x) \times (-\cos(x)) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x + \sin x}{-\cos x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2 \tan x \quad (2)$$

$$C = \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) - \tan \left( \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{6\pi - \pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{6\pi - \pi}{6} \right) - \tan \left( \frac{6\pi - \pi}{6} \right) \quad (3)$$

$$C = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) - \tan \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) + \tan \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin \left( \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{6} \right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

|          | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |

$$C = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x) \quad (4)$$

$$D = \sin(10\pi + \pi - x) + \cos(4\pi + \pi + x) + \cos(2 \times 7\pi - x)$$

$$D = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(-x)$$

$$D = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = \sin(x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) = -\tan(x) + \tan(x) = 0 \quad (5)$$

$$F = \cos^2 \left( \frac{\pi}{5} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi}{10} \right) \quad (6)$$

$$1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

وتكتب على شكل مبرهنة

$$\text{تمرين 5: علما أن: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ و } \sin x = -\frac{4}{5}$$

أحسب  $\tan x$  و  $\cos x$

**الجواب: (1)** حساب  $\cos x$

$$\text{نعلم أن: } (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \text{ يعني } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{يعني } (\cos x)^2 = 1 - \frac{16}{25} \text{ يعني } (\cos x)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{يعني } \cos x = -\frac{3}{5} \text{ أو } \cos x = \frac{3}{5} \text{ يعني } \cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}} \text{ أو } \cos x = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\text{ونعلم أن: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ يعني } \cos x \geq 0 \text{ ومنه نأخذ: } \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\text{(1) حساب } \tan x \text{ لدينا: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{يعني } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{تمرين 6: علما أن: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ و } \tan x = \frac{1}{3} \text{ أحسب } \cos x$$

$$(2) \sin x$$

$$\text{الجواب: (1) نعلم أن: } 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$\text{يعني أن: } 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ يعني } 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{يعني } \cos^2 x = \frac{9}{10} \text{ يعني } 10 \cos^2 x = 9 \text{ يعني } \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{يعني } \cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} \text{ أو } \cos x = \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\text{ونعلم أن: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ يعني } \cos x \leq 0 \text{ ومنه نأخذ: } \cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$(2) \text{ نعلم أن: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ يعني: } \sin x = \tan x \times \cos x \text{ يعني:}$$

$$\sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

**ملخص للعلاقات بين النسب المثلثية**

|          | $-x$      | $\pi - x$ | $\pi + x$ | $\frac{\pi}{2} - x$ | $\frac{\pi}{2} + x$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|---------------------|---------------------|
| $\cos x$ | $\cos x$  | $-\cos x$ | $-\cos x$ | $\sin x$            | $-\sin x$           |
| $\sin x$ | $-\sin x$ | $\sin x$  | $-\sin x$ | $\cos x$            | $\cos x$            |
| $\tan x$ | $-\tan x$ | $-\tan x$ | $\tan x$  | $\frac{1}{\tan x}$  | $-\frac{1}{\tan x}$ |

**7. النسب المثلثية للقيم الاعتيادية:**

**تمرين 7:** بسط و أحسب التعبيرات التالية :

$$\cos \frac{10\pi}{3} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{6} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{6} \text{ و } \sin \frac{3\pi}{4} \text{ و } \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan \frac{37\pi}{4} \text{ و } \tan \frac{3\pi}{4} \text{ و } \cos \frac{34\pi}{3} \text{ و } \sin \frac{53\pi}{6} \text{ و } \cos \frac{13\pi}{6}$$

$$\text{أجوبة: } \cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left( \frac{4\pi - \pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left( \frac{4\pi - \pi}{4} \right) = \sin \left( \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left( \frac{6\pi + \pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left( \frac{6\pi + \pi}{6} \right) = \sin \left( \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos \left( \frac{9\pi + \pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 3\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$B = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$\text{ونلاحظ أيضا أن: } \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه: } B = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \times 1 = 2$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12} \quad (3)$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12} \text{ يعني: } \frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{9\pi}{12} = \pi - \frac{3\pi}{12} \text{ يعني: } \frac{3\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12} \text{ يعني: } \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi$$

$$\text{ومنه: } C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left( \pi - \frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \pi - \frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \pi - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left( \frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} \right) + 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\text{ونلاحظ أيضا أن: } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \text{ يعني: } \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه: } C = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left( \frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

### تمرين 10: أحسب وبسط

$$A = \sin(\pi + x) - \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin(6\pi + x) - \cos(3\pi - x) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$C = \sin(x - 7\pi) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 11\pi) + \cos\left(\frac{-3\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{أجوبة: } A = \sin(\pi + x) - \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x + \cos x - \cos x + \sin x = 0$$

$$B = \sin(6\pi + x) - \cos(3\pi - x) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin(2 \times 3\pi + x) - \cos(2\pi + \pi - x) + \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) - \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin(x) + \cos(x) - \cos(x) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x) - \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$B = \sin(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) - \sin(x) = 0$$

$$C = \sin(x - 7\pi) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 11\pi) + \cos\left(\frac{-3\pi}{2} - x\right)$$

$$C = \sin(x - \pi - 6\pi) - \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2} + x\right) + \sin(x + 1\pi + 10\pi) + \cos\left(\frac{-4\pi + \pi}{2} - x\right)$$

$$C = \sin(x - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$C = \sin(-(\pi - x)) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$$

$$C = -\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$$

$$C = -\sin(x) + \sin(x) - \sin(x) + \sin(x) = 0$$

### تمرين 11: بين أن :

$$1. (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$$

$$2. \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x = 0$$

$$3. \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \times \sin^2 x$$

$$4. \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \times \sin^2 x = 1$$

$$5. \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \times \sin^2 x = 1$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \text{ يعني } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه: } F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \quad (7)$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7} \text{ يعني: } \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7} \text{ يعني: } \frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7} \text{ يعني: } \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$$

$$\text{ومنه: } G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$\text{يعني: } G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) \quad (8)$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$$

$$\text{ومنه: } H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{يعني: } H = \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{نلاحظ أيضا أن: } \frac{3\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه: } H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{يعني: } H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left( \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = 2 \times 1 = 2$$

### تمرين 9: بسط التعابير التالية :

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} - 2\sin \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \quad (1)$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} \quad (2)$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12} \quad (3)$$

### الأجوبة :

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} - 2\sin \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \quad (1)$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \text{ يعني: } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \text{ يعني: } \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$$

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad (2)$$

$$\text{نلاحظ أن: } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$$

$$\text{و أن: } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8} \text{ يعني: } \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$$

$$\text{ومنه: } B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{يعني: } B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left(-\cos \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} + 2\cos^2 \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{أجوبة (1)} \quad (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 1$$

$$= \cos^2 x + 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2 \times 1 = 2$$

$$\cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 - \cos^2 x + \sin^2 x \quad (2)$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \times \sin^2 x \quad (3)$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = (\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x \times \sin^2 x + (\sin^2 x)^2 : \text{نعلم أن}$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \times \sin^2 x : \text{يعني}$$

$$(1)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \times \sin^2 x : \text{يعني}$$

$$1 - 2\cos^2 x \times \sin^2 x = \cos^4 x + \sin^4 x : \text{يعني}$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \times \sin^2 x = 1 \quad (4)$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \times \sin^2 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 + 2 \times \sin^2 x$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \times \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \times \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^3 = \cos^6 x + 3\cos^4 x + 3\cos^2 x \times \sin^4 x + \sin^6 x : \text{نعلم أن (5)}$$

$$1 = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + 3\cos^2 x \times \sin^4 x : \text{يعني}$$

$$1 = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) : \text{يعني}$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 : \text{يعني}$$



« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien