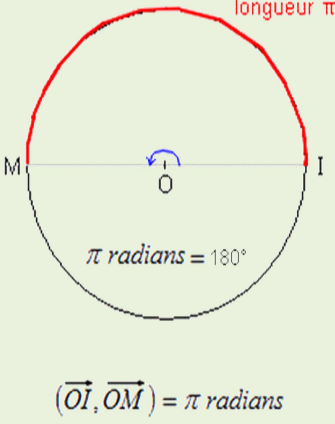
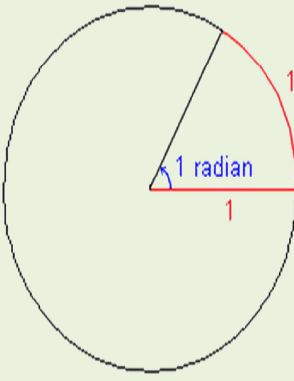


الحساب المثلثي

وحدات قياس الزوايا





❖ قياس زاوية مستقيمة هو 180° أما قياسها بالريديان فهو π (طول نصف دائرة شعاعها 1)

❖ توجد وحدة قياس أخرى لقياس الزوايا وهي الغراد و قياس زاوية مستقيمة بالغراد هو 200 غراد

❖ إذا كانت α و β و γ هي قياسات زاوية خندسية على التوالي بالدرجة و الريديان و الغراد فإن :

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$

الدائرة المثلثية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل I و موجهة توجيهها موجبا . التوجيه الموجب هو منحنى الدوران حول الدائرة انطلاقا من I في المنحنى المضاد لحركة عقارب الساعة

الأفاصل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

لتكن $(\mathcal{C})$ دائرة مثلثية و O مركزها و I أصلها و α عددا حقيقيا

➤ في حالة $\alpha > 0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathcal{C})$ بحيث القياس بالريديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو α عند التنقل على $(\mathcal{C})$ في المنحنى الموجب

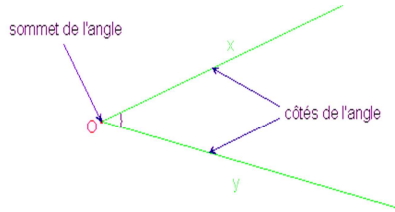
➤ في حالة $\alpha < 0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathcal{C})$ بحيث القياس بالريديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو $-\alpha$ عند التنقل على $(\mathcal{C})$ في المنحنى السالب

- في كلتا الحالتين α يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M على $(\mathcal{C})$ و نكتب $M(\alpha)$
- إذا كان $\alpha \in]-\pi, \pi]$ نقول إن α هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M و هو وحيد
- $\alpha + 2k\pi$ هو أيضا أفصول منحنى للنقطة M على $(\mathcal{C})$ أي $M(\alpha)$ و $M(\alpha + 2k\pi)$ منطبقتان حيث $k \in \mathbb{Z}$

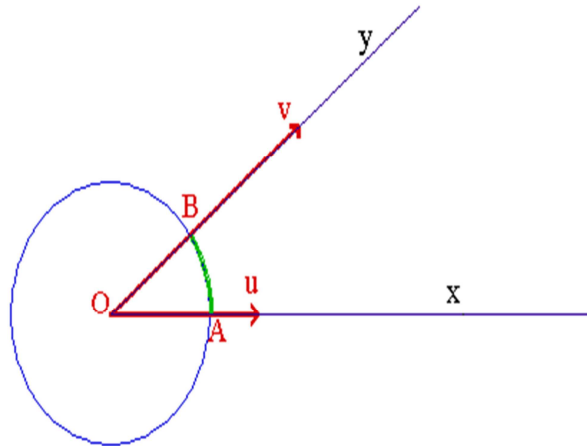
نقول أن x توافق y بترديد 2π و نكتب $x \equiv y [2\pi]$ إذا وفقط إذا كان $x = y + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين لهما نفس الأصل

- ليكن $([ox], [oy])$ نصفي مستقيمين لهما نفس الأصل O
- الزوج $([ox], [oy])$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{ox, oy})$
 - الزوج $([oy], [ox])$ يحدد زاوية موجهة لنفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{oy, ox})$



الزوج $(\widehat{ox, oy})$ يسمى زاوية موجهة لنصفي مستقيمين $[ox]$ و $[oy]$



الزوج $(\vec{u}, \vec{v})$ يسمى الزاوية الموجهة للمتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

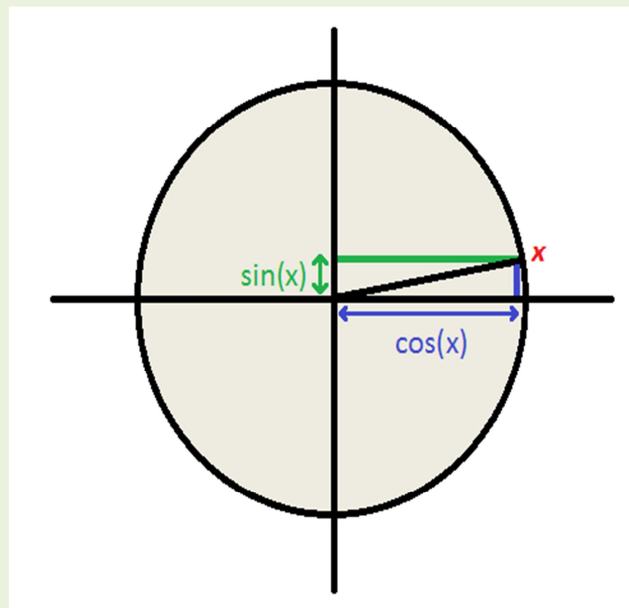
$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{u}) &= 2k\pi \\ (\vec{u}, \vec{v}) &= -(\vec{v}, \vec{u}) + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \text{ مع } (\vec{u}, \vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) + 2k\pi \end{aligned}$$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

لتكن $(\mathcal{C})$ دائرة مثلثية أصلها I و J النقطة من $(\mathcal{C})$ بحيث $\frac{\pi}{2}$ هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{OI}, \vec{OJ})$
ليكن x أفصولا منحنيًا لنقطة M على الدائرة $(\mathcal{C})$

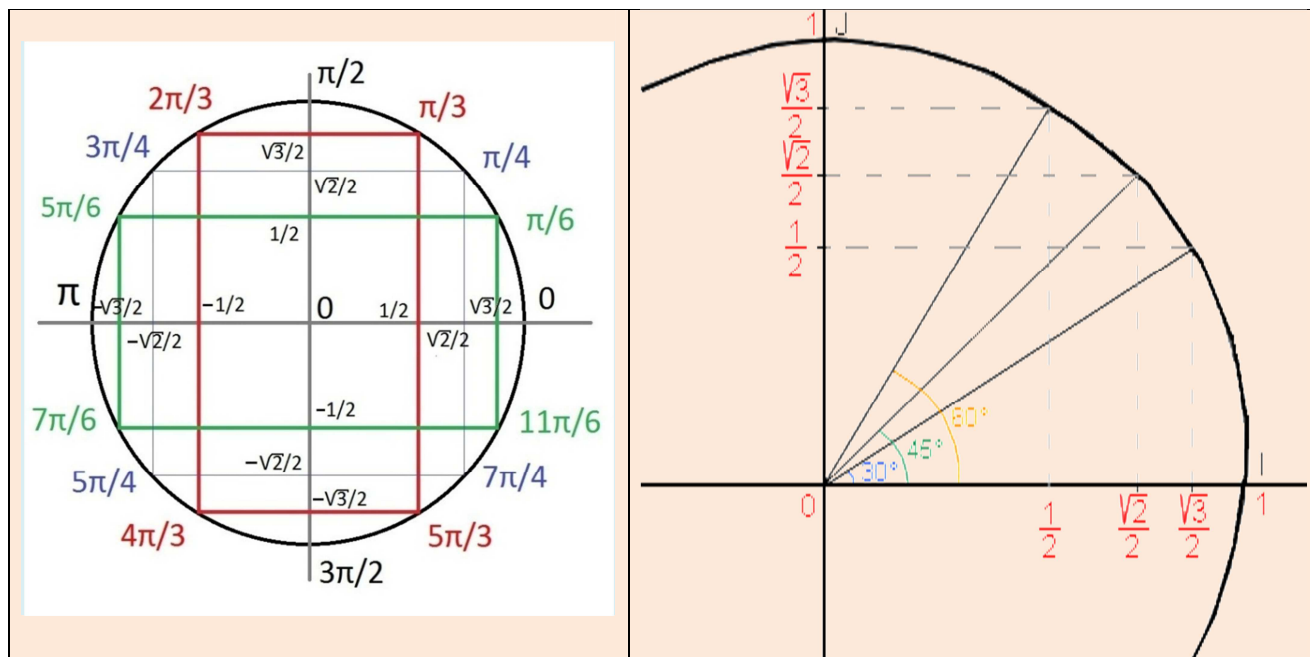
أفصول النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ يسمى جيب تمام x ونرمز له بـ $\cos(x)$

أرتوب النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ يسمى جيب x ونرمز له بـ $\sin(x)$



ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ يسمى ظل } x \text{ و نكتب } \frac{\sin x}{\cos x}$$



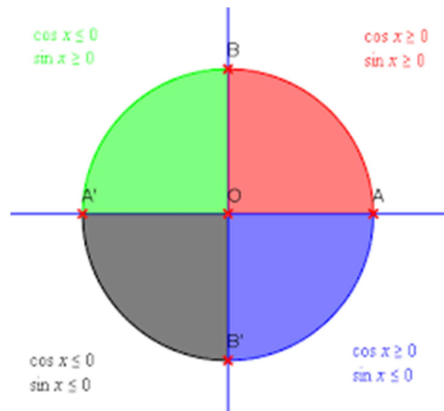
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \\ \tan(-x) = -\tan x \end{cases}$$

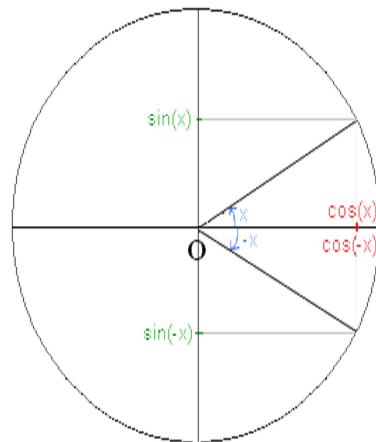
	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\sin()$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\cos()$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

$\tan(\quad)$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$(k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \\ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \end{cases}$				
$(k \in \mathbb{Z}) \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$				
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$			$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	
$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$			$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	

إشارة $\sin$ و $\cos$



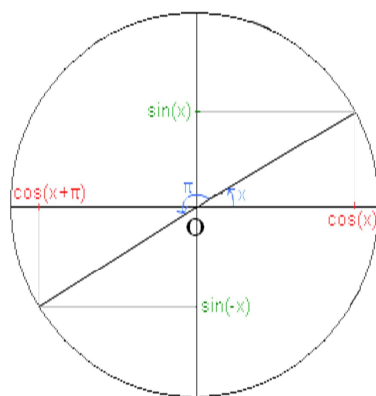
خصائص



$$\cos(-x) = \cos(x)$$

et

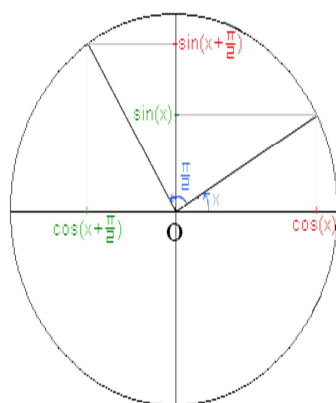
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

et

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$



$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

et

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

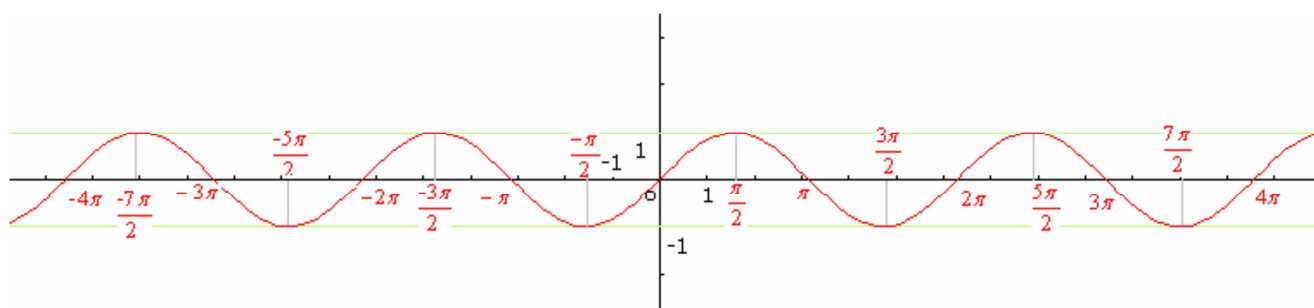
بنفس الطريقة يمكن الإشتغال على الدائرة لاستنتاج : $\sin(\pi - x)$ و $\cos(\pi - x)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

معادلات مثلثية

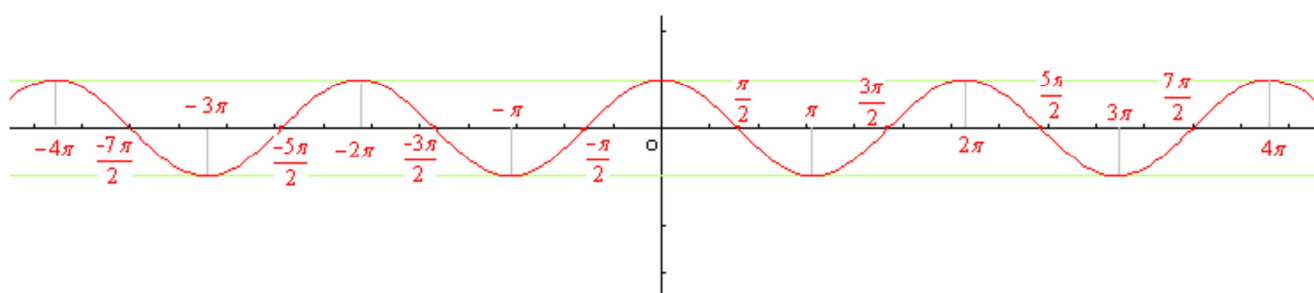
$\tan x = a$	$\sin x = a$	$\cos x = a$
إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث : $\tan x = a$ تكافئ $\tan x = \tan \alpha$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \alpha + k\pi$	- إذا كان $a \in [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان $a = 1$ $\sin x = 1$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ - إذا كان $a = -1$ $\sin x = -1$ تكافئ	- إذا كان $a \notin [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان $a = 1$ $\cos x = 1$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = 2k\pi$ - إذا كان $a = -1$ $\cos x = -1$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \pi + 2k\pi$ - إذا كان $a \in]-1, 1[$

	$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $a \in]-1, 1[$ إذا كان • يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ بحيث $\sin x = a$ تكافئ $\sin x = \sin \alpha$ تكافئ : $(k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ <u>حالة خاصة</u> $\sin x = 0$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = k\pi$	يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0, \pi[$ بحيث $\cos x = a$ تكافئ $\cos x = \cos \alpha$ تكافئ : $(k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ <u>حالة خاصة</u> $\cos x = 0$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
--	---	---

منحنى دالة sin



منحنى دالة cos



منحنى دالة $\tan$

