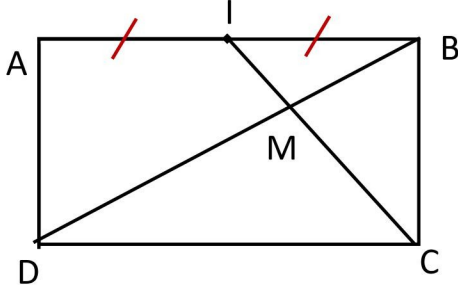


تمرين 1: $ABCD$ مستطيل، I منتصف $[AB]$ ، $[IC]$ و $[BD]$ تتقاطعان في النقطة M



لدينا في المثلث MDC :

$$B \in (MD) \text{ و } I \in (MC) \quad \rightarrow$$

$$(IB) \parallel (DC) \quad \rightarrow \text{(لأن } ABCD \text{ مستطيل)}$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MI}{MC} = \frac{IB}{DC}$$

$$\text{وبما أن: } I \text{ منتصف } [AB], \text{ فإن: } \frac{IB}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{منه: } \frac{MB}{MD} = \frac{1}{2} \text{ أي } MB = \frac{1}{2} MD$$

وبما أن المتجهتان $\vec{MB}$ و $\vec{MD}$ مستقيمتان ولهما منحيان

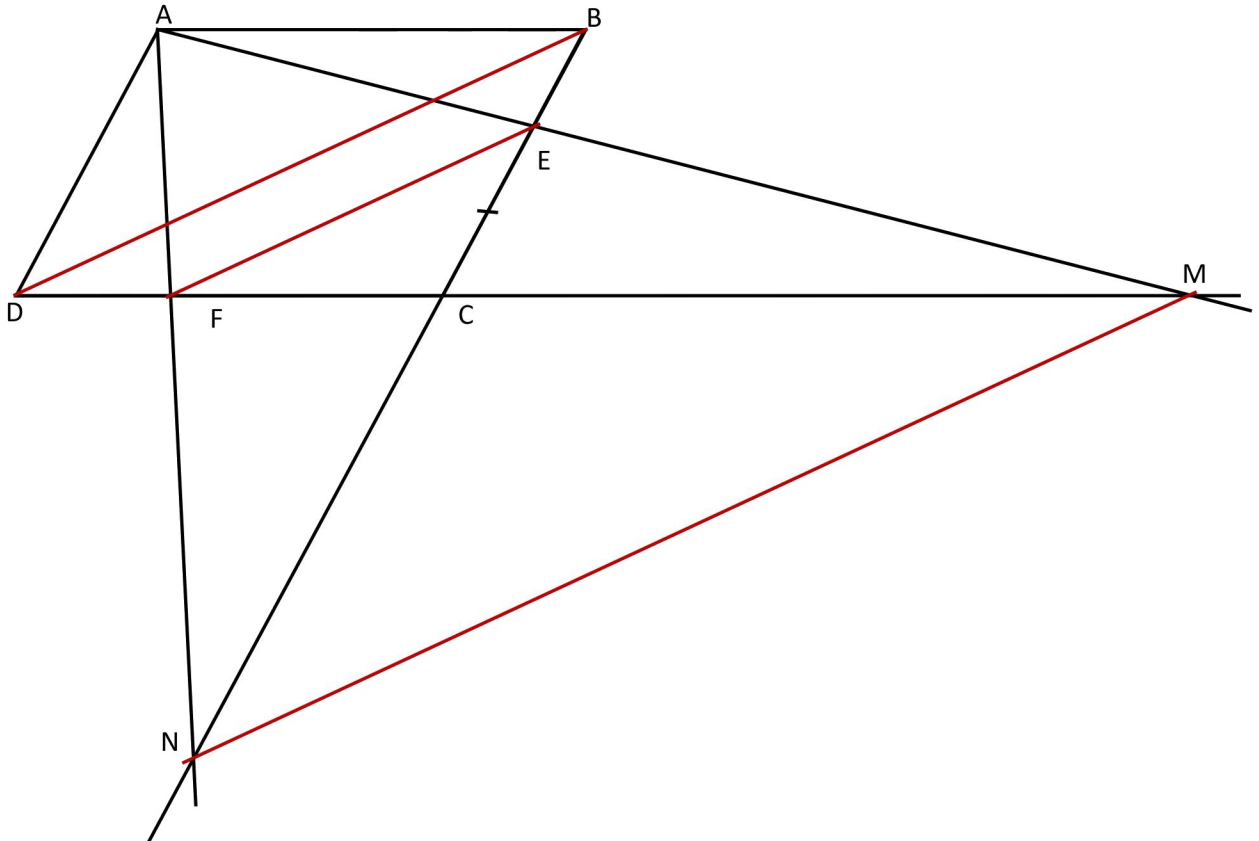
$$\vec{MB} = \frac{-1}{2} \vec{MD} \text{ متعاكسان فإن:}$$

$$\text{لدينا: } \vec{MB} = \frac{-1}{2} \vec{MD} \text{ منه: } \vec{MB} = \frac{-1}{2} (\vec{MB} + \vec{BD}) \text{ أي: } \vec{MB} = \frac{-1}{2} \vec{MB} - \frac{1}{2} \vec{BD} \text{ أي: } \vec{MB} + \frac{1}{2} \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD}$$

$$\text{أي } \left(1 + \frac{1}{2}\right) \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD} \text{ أي } \frac{3}{2} \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD} \text{ منه: } 3\vec{MB} = -\vec{BD} = \vec{DB} \text{ بالتالي: } \vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BD}$$

لإثبات استقامية متجهتين نبين أن إحداهما تساوي جزاء الأخرى في عدد حقيقي

تمرين 2: $ABCD$ متوازي أضلاع.



لدينا في المثلث EMC :

$C \in (BE)$ و $M \in (AE)$ ➤

$(MC) \parallel (AB)$ (لأن ABCD متوازي أضلاع) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{AE}{AM} = \frac{BE}{BC}$ وبما أن : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ فإن $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$

إذن $\frac{AE}{AM} = \frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AM}$

لدينا في المثلث BCD :

$F \in (DC)$ و $E \in (BC)$ ➤

$(EF) \parallel (DB)$ (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{DF}{DC} = \frac{BE}{BC}$ وبما أن : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ فإن $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$

إذن $\frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{DC}$ مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن : $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$

لدينا في المثلث ADF :

$N \in (AF)$ و $C \in (DF)$ ➤

$(NC) \parallel (AD)$ (لأن ABCD متوازي أضلاع) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{AF}{AN} = \frac{DF}{DC}$ وبما أن : $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$ فإن $\frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$

إذن $\frac{AF}{AN} = \frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AN}$ مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن : $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN}$

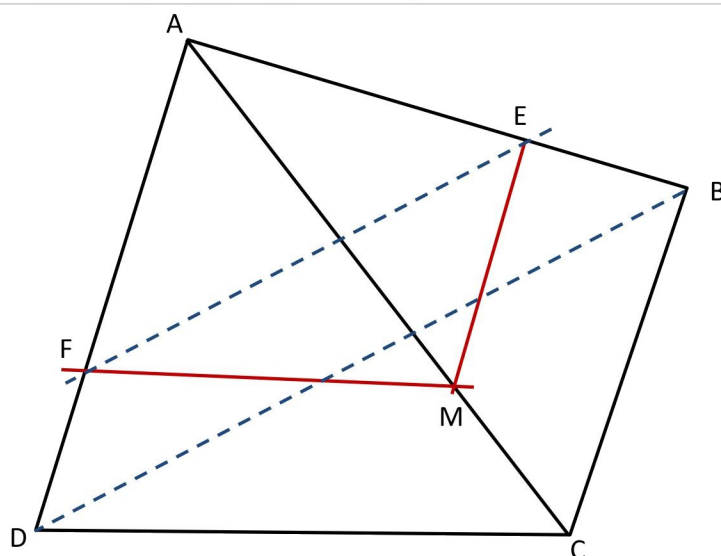
لنبين أن : $(EF) \parallel (MN)$

لدينا $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN}$ إذن : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{MN}$

بالتالي المتجهتان $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{MN}$ مستقيمتان أي أن $(EF) \parallel (MN)$

الرمز ➤ في كل السلسلة للإشارة إلى شروط تطبيق مبرهنة طاليس المباشرة أو العكسية.

تمرين 3 : ABCD رباعي محدب و M نقطة تقاطع قطريه.



لدينا في المثلث ABC :

$E \in (AB)$ و $M \in (AC)$ ➤

$(EM) \parallel (BC)$ (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(1) \quad \frac{AE}{AB} = \frac{BM}{AC}$$

لدينا في المثلث ADC :

$F \in (AD)$ و $M \in (AC)$ ➤

$(FM) \parallel (DC)$ (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(2) \quad \frac{AF}{AD} = \frac{BM}{AC}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ ، لدينا الآن ، في المثلث ABD :

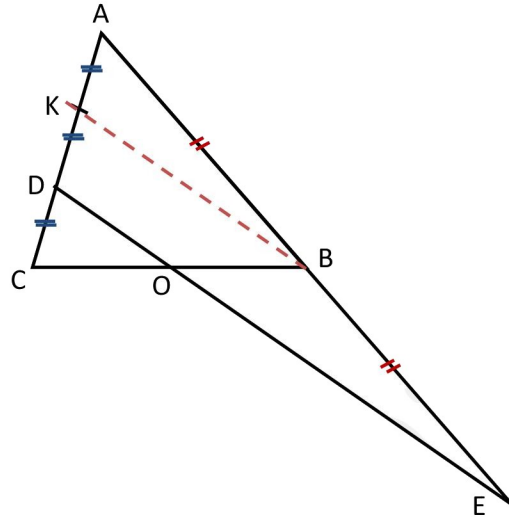
➤ $F \in (AD)$ و $E \in (AB)$

➤ للنقط A و E و B نفس ترتيب A و F و D

➤ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن: $(EF) \parallel (BD)$

تمرين 4 :



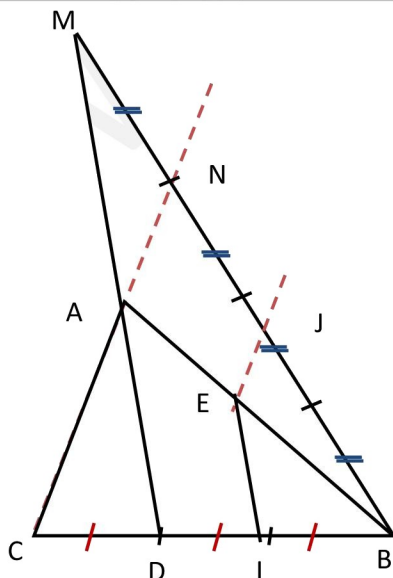
1 لنبين أن $(KB) \parallel (OD)$ ، في المثلث ADE لدينا B منتصف $[AE]$ و K منتصف $[AD]$ إذن $(KB) \parallel (DE)$ (خاصية المستقيم المار بمنتصفي ضلعي مثلث) وبما أن $O \in (DE)$ فإن: $(KB) \parallel (OD)$

2 لنبرهن أن O منتصف $[BC]$ ، بما أن $(KB) \parallel (OD)$ فإنه يمكن اعتبار الاسقاط على (BC) بتواز مع المستقيم (KB) باعتبار هذا الاسقاط لدينا: مسقط K هي B و مسقط D هي O ومسقط C هي C إذن مسقط القطعة $[CK]$ هي القطعة $[CB]$

و بما أن $[CK]$ منتصفها هو D و لأن الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة فإن $[CB]$ منتصفها هو O

السؤال الثاني يمكن الإجابة عنه باستعمال خاصية « المستقيم المار بمنتصف ضلع مثلث و الموازي للضلع الثاني سيمر بمنتصف الضلع الثالث » ، لكننا فضلنا طريقة تستغل خصائص الاسقاط

تمرين 5 : ABC مثلث ، $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DM} = 2 \overrightarrow{DA}$ و $4 \overrightarrow{BN} + 3 \overrightarrow{MB} = \vec{0}$



المتساوية $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ تعني: $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

و المتساوية $4 \overrightarrow{BN} + 3 \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ تعني: $4 \overrightarrow{BN} = -3 \overrightarrow{MB} = 3 \overrightarrow{BM}$

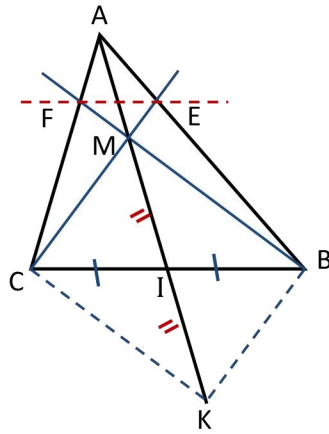
أي: $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BM}$

في هذا السؤال يجب تغيير المتساويات المتجهية لكي نحصل على متساويات أكثر تبسيطاً حتى نتمكن من إنشاء الشكل.

	لنبين أن $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} =$ $\overrightarrow{MB} = -2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB}$ لدينا : $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{MB} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$			
	لنبين أن $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{NB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{3}{4}(2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{3}{4}(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$ $\overrightarrow{NB} = \frac{3}{4}(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}) = \frac{3}{4}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{6}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{12}\overrightarrow{BC}$ لدينا : $\overrightarrow{NB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ يتطلب الإجابة عن هذين السؤالين بحثا ومحاولة تفكيك المتجهات باستعمال علاقة شال ، الإشكال يكمن في النقطة التي يجب استعمالها لكي نستطيع استعمال المعطيات و الوصول للنتيجة المطلوبة، ورغم أنه يبدو معقدا لكثرة المتساويات فلأننا حاولنا الشرح أكثر ما يمكن .	2		
	لنبين أن : النقط A و C و N مستقيمية $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ لدينا : $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ بالتالي النقط A و C و N مستقيمية	3		
	<table border="0"> <tr> <td data-bbox="111 1657 796 2105"> لدينا في المثلث ABN : $E \in (AB)$ و $J \in (BN)$ ➤ $(EJ) \parallel (AN)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(2) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BJ}{BN}$ </td> <td data-bbox="796 1657 1484 2105"> لدينا في المثلث ADB : $E \in (AB)$ و $I \in (DB)$ ➤ $(EI) \parallel (AD)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(1) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BD}$ </td> </tr> </table> من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{BI}{BD} = \frac{BJ}{BN}$ ، لدينا الآن : في المثلث BDN : $J \in (BN)$ و $I \in (DB)$ ➤ لنقط B و J و N نفس ترتيب B و I و D ➤ $\frac{BI}{BD} = \frac{BJ}{BN}$ (حسب الاستنتاج السابق) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن : $(IJ) \parallel (DN)$	لدينا في المثلث ABN : $E \in (AB)$ و $J \in (BN)$ ➤ $(EJ) \parallel (AN)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(2) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BJ}{BN}$	لدينا في المثلث ADB : $E \in (AB)$ و $I \in (DB)$ ➤ $(EI) \parallel (AD)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(1) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BD}$	4
لدينا في المثلث ABN : $E \in (AB)$ و $J \in (BN)$ ➤ $(EJ) \parallel (AN)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(2) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BJ}{BN}$	لدينا في المثلث ADB : $E \in (AB)$ و $I \in (DB)$ ➤ $(EI) \parallel (AD)$ (معطيات) ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(1) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BD}$			

تمرين نموذجي اخترناه من الكتاب المدرسي يوضح كيف يمكن توظيف مفهوم الإسقاط و المتجهات و مبرهنة طاليس.

تمرین 6 :



1

لدينا K ممائلة M بالنسبة لـ I
 إذن للقطعتين $[MK]$ و $[BC]$ نفس المنتصف منه $CMBK$ متوازي الأضلاع
 إذن: $(ME) \parallel (BK)$ و $(MF) \parallel (CK)$

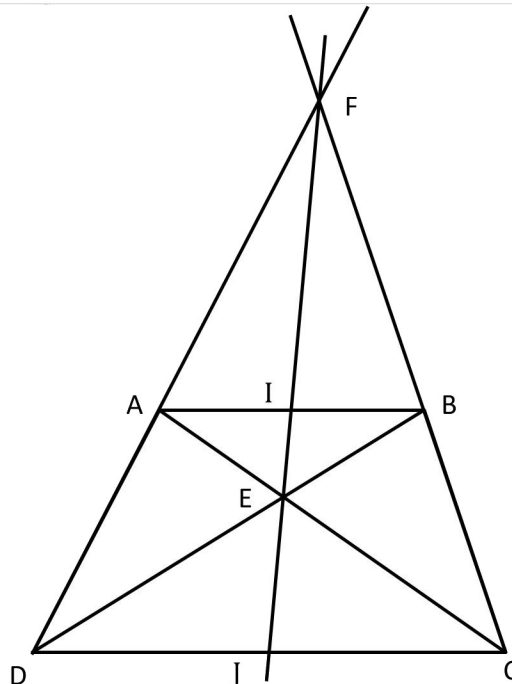
لدينا في المثلث ACK : $M \in (AK)$ و $F \in (AC)$ ➤ $(MF) \parallel (CK)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(2) \quad \frac{AF}{AC} = \frac{AM}{AK}$	لدينا في المثلث ABK : $M \in (AK)$ و $E \in (AB)$ ➤ $(ME) \parallel (BK)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(1) \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AK}$
---	---

من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ ، لدينا الآن ، في المثلث ABC :

- $E \in (AB)$ و $F \in (AC)$
- للنقط A و E و B نفس ترتيب A و F و C
- $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن: $(EF) \parallel (BC)$

تمرین 7: - مزید امن التفکیر -



لدينا في المثلث AIE : $C \in (AE)$ و $J \in (EI)$ ➤ $(JC) \parallel (AI)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(2) \quad \frac{EI}{EJ} = \frac{EA}{EC} = \frac{IA}{JC}$ لدينا في المثلث ABE : $C \in (AE)$ و $D \in (EB)$ ➤ $(AB) \parallel (DC)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(4) \quad \frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{CD}$	لدينا في المثلث FDJ : $I \in (FJ)$ و $A \in (DF)$ ➤ $(AI) \parallel (DJ)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(1) \quad \frac{FA}{FD} = \frac{FI}{FJ} = \frac{AI}{DJ}$ لدينا في المثلث FDC : $B \in (FC)$ و $A \in (DF)$ ➤ $(AB) \parallel (DC)$ ➤ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $(3) \quad \frac{FA}{FD} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{DC}$
من (1) و (3) نستنتج أن : $\frac{AI}{DJ} = \frac{AB}{DC}$ (*) ومن (2) و (4) نستنتج أن : $\frac{IA}{JC} = \frac{AB}{CD}$ (**) إذن من (*) و (**) نستنتج أن : $\frac{AI}{DJ} = \frac{AI}{JC}$ منه : $DJ = JC$ بالتالي : J منتصف $[DC]$ من (**) نستنتج أن : $\frac{AI}{AB} = \frac{DJ}{DC}$ وحيث أن J منتصف $[DC]$ فإن : $\frac{DJ}{DC} = \frac{1}{2}$ منه : $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ بالتالي I منتصف $[AB]$	
خلال كل السلسلة قد تلاحظ أن استعمال مبرهنة طاليس يطغى على استعمال خاصية حفاظ الإسقاط على استقامية متجهتين لأن هذه الأخيرة هي مجرد نتيجة لخاصية طاليس، إذ يمكن القول أنها مظهر آخر لمبرهنة طاليس ليس إلا.	