الإسقاط

القدرات المنتظرة

*- الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس.

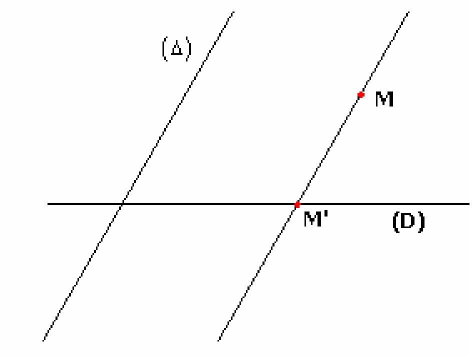
1- مسقط نقطة على مستقيم

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و M نقطة من المستو

يوجد مستقيم وحيد مار من M و يوازي (Δ).

هذا المستقيم يقطع (D) في نقطة وحيدة M'

النقطة M' تسمى مسقط M على (D) بتواز مع (Δ)



تعريف

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و M نقطة من المستوى
مسقط النقطة M على (D) بتواز مع (Δ) هو نقطة تقاطع (D) مع المستقيم الموازي للمستقيم (Δ) و المار من M

ملاحظة: إذا كانت $M \in (D)$ فان مسقط M على (D) بتواز مع (Δ) هو نفسها.

2- الإسقاط على مستقيم بتواز مع آخر

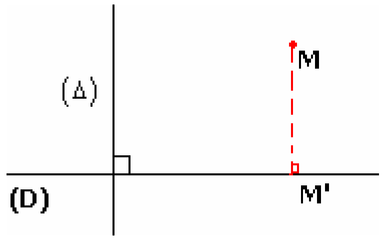
أ- تعريف

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان
الطريقة التي تربط كل نقطة M من المستوى بمسقطها M' على المستقيم (D) بتواز مع المستقيم (Δ) تسمى الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

ب- الإسقاط العمودي على مستقيم

تعريف1

الإسقاط على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى الإسقاط العمودي على (D)

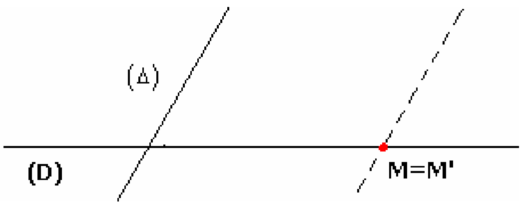


تعريف2

مسقط النقطة M على المستقيم (D) بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)

3- خاصيات أولية

أ- خاصية1



- كل نقطة من (D) منطبقة مع مسقطها على (D) بتواز مع (Δ).
- كل نقطة منطبقة مع مسقطها على (D) بتواز مع (Δ) تنتمي إلى (D)

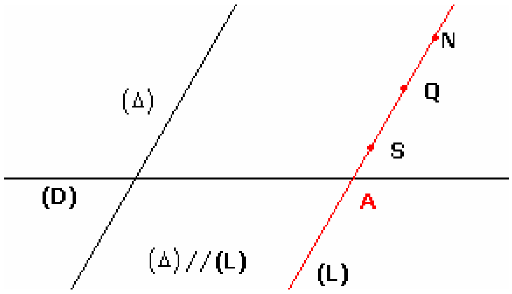
مفردات

- إذا كان مسقط النقطة M هي نفسها على (D) بتواز مع (Δ) نقول إن M **صامدة** بالإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).
- المستقيم (D) **صامدة** بالإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

نعبر عن الخاصية 1 بالتعبير التالي:

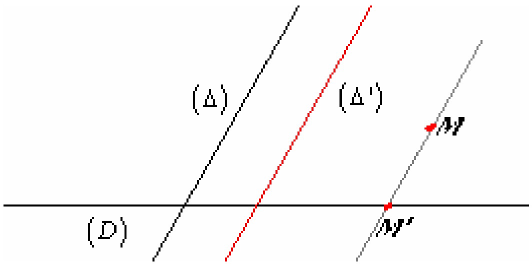
مجموعة النقط الصامدة بالاسقاط على (D) بتواز مع (Δ) هي المستقيم (D)

ب- خاصية2



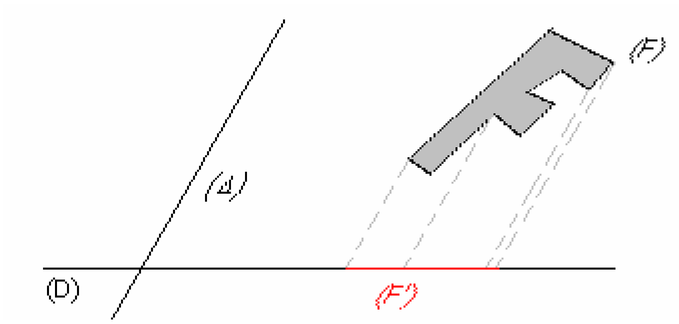
لتكن A نقط من مستقيم (D). مجموعة النقط التي لها نفس المسقط A على (D) بتواز مع (Δ) هي المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (Δ)

ج- خاصية3



إذا كان مستقيم (Δ') يوازي (Δ) فان الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) هو الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ') نقول إن الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) لا يتغير بتعويض (Δ) بمستقيم له نفس الاتجاه.

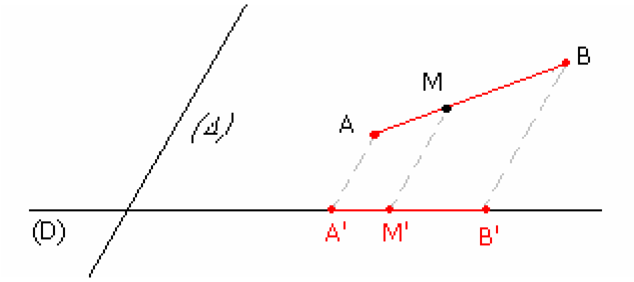
4- مسقط شكل



أ- تعريف

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و (F) شكلا من المستوى و (F') جزء من المستقيم (D) نقول إن (F') مسقط الشكل (F) إذا وفقط إذا تحقق: - مسقط كل نقطة من (F) على (D) بتواز مع (Δ) ينتمي إلى (F'). - كل نقطة من (F') هي مسقط نقطة على الأقل من (F) على (D) بتواز مع (Δ) .

ب- مسقط قطعة



خاصية) مقبولة (

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و A' و B' مسقطيهما على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) بالتوالي. مسقط $[AB]$ هو $[A'B']$

ملاحظة:

إذا كان $(AB)//(\Delta)$ فان $A'=B'$ ومنه مسقط $[AB]$ هي القطعة المنعدمة $[A'A']$.

ج- مسقط منتصف قطعة

خاصية

إذا كان A' و B' مسقطي النقطتين A و B على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) بالتوالي فان:

مسقط منتصف القطعة $[AB]$ هو منتصف $[A'B']$.

نعبر عن هذا بقولنا: الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) يحافظ على المنتصف.

5- مبرهن طاليس المباشرة و العكسية متجهيا – الإسقاط ومعامل الاستقامية لمتجهتين

أ- نشاط1

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين

A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $A \neq B$.

A' ; B' ; C' ; D' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ) .

1- لنفترض أن A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

بين أن $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$ و أن $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

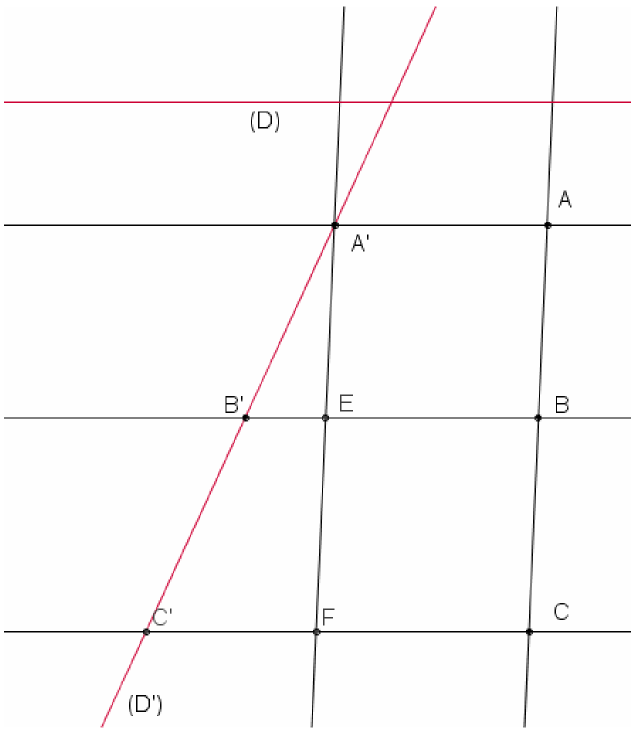
2- لنفترض أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ بين أن $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

3- لنفترض أن $\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{AB}$ بين أن $\overrightarrow{C'D'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$

تذكير لمبرهنة طاليس المباشرة في المثلث

ليكن ABC مثلثا و M و N نقطتين من (AB) و (AC) على التوالي

إذا كان $(BC)//(MN')$ فان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



تصحيح النشاط

1- نبين أن $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$ و $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

نعتبر المستقيم المار من A' و الموازي لـ (AB) ويقطع (BB') و (CC') عل التوالي في E و F

باعتبار المثلث $A'BE$ و التوازي (BE) مع (CF)

وتطبيق خاصية طاليس نحصل على $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{A'F}{A'E}$

$ABEA'$ و $ACFA'$ متوازيا الأضلاع

و منه $A'F = AC$; $A'E = AB$

حسب طاليس فان $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$

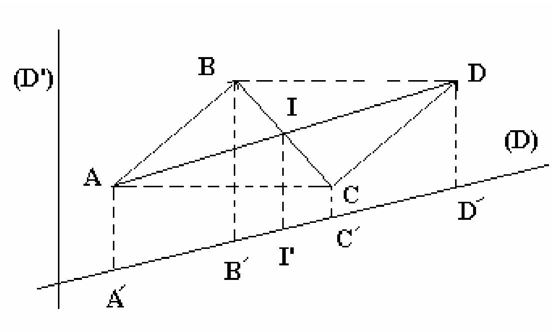
وحيث أن $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}=|\lambda|$

ومنه $A'C'=|\lambda|A'B'$

و حيث أن النقط A ; B ; C و النقط A' ; B' ; C' في نفس الترتيب و $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$

فان $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

2- نبين أن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ تكافئ $ABDC$ متوازي الأضلاع

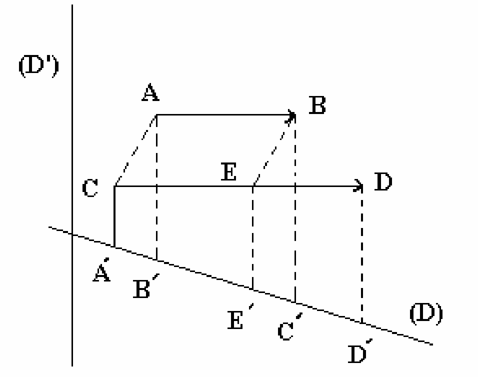
ليكن I مركز $ABDC$ و I' مسقطها على (D) بتواز (D')

لدينا $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IC}$

ومنه حسب (1) $\overrightarrow{I'A'}=-\overrightarrow{I'D'}$; $\overrightarrow{I'B'}=-\overrightarrow{I'C'}$

إذن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

3- نبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$



لدينا $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ نعتبر E حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$

ومنه $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CE}$

وبالتالي حسب (1) و(2) نستنتج $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'E'}$

و $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{C'E'}$

إذن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

ب- مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$

إذا كان A' ; B' ; C' مساقط A ; B ; C بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) و كان

$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

ج- الإسقاط و تساوي متجهتين

مبرهنة

A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' مساقطها بالتوالي

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'B'}$

د- الإسقاط ومعامل الاستقامية لمتجهتين

مبرهنة

A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' مساقطها بالتوالي

على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ)

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ نعتبر (Δ) مستقيم يقطع (AC) و لا يوازي (BC) لتكن E' و F' و B' و C' المساقط العمودية بالتوالي E و F و B و C على (Δ)

بين أن $\overrightarrow{E'F'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{B'C'}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

نعتبر J تقاطع (AI) و (EF) و B' و C' مسقطا B و C على (AI) بتواز مع (EF)

1- بين أن I منتصف $[B'C']$

2- بين أن $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$

3- بين أن $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$ و استنتج $\overrightarrow{AI}$ بدلالة $\overrightarrow{AJ}$

ذ- نتائج

الإسقاط و المسافة

نتيجة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$ و (AB) لا يوازي (Δ)

إذا كان A' ; B' ; C' مساقط A ; B ; C بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

فان $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

ملاحظة يمكن أن يكون $AB\neq A'B'$ نعبر عن هذا بقولنا الإسقاط لا يحافظ على المسافة

الإسقاط و المحور

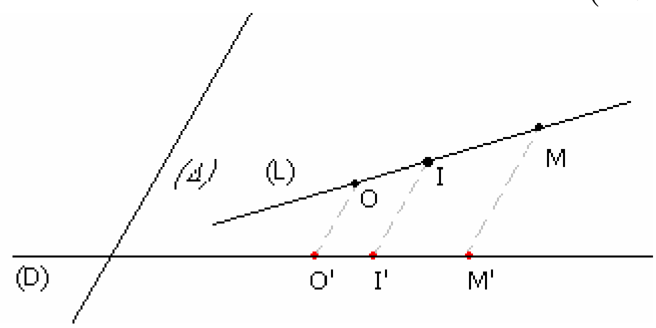
نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و $L(O;I)$ محور حيث (L) و (Δ) غير متوازيين

و O' و I' مسقطي O و I بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

x أفصول نقطة M في المحور $L(O;I)$ و M' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ)

حدد M' في المحور $\Delta(O';I')$



نتيجة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و $L(O;I)$ محور حيث (L) و (Δ) غير متوازيين

و O' و I' مسقطي O و I بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) .

M نقطة من (L) و M' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ) .

إذا كان x أفصول M في المحور $L(O;I)$ فان x هو أفصول النقطة M' في المحور $\Delta(O';I')$

ر- مبرهنة طاليس العكسية متجهيا

نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط من مستقيم (L)

حيث $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و A' ; B' مسقطي A و B بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

و $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

لتكن C_1 مسقط C على (D) بتواز مع (Δ).

بين أن $C_1=C'$

المبرهنة العكسية

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A \neq B$
إذا كان A' ; B' مسقطي A و B بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) و كان $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ و
$\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$ فإن C' مسقط C على (D') بتواز مع (Δ)

6- الإسقاط و مجموع متجهتين

نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين

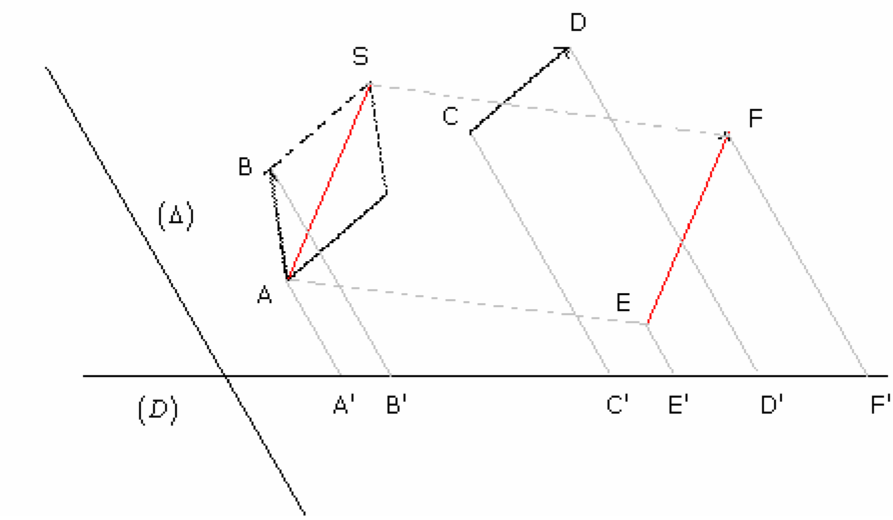
A ; B ; C ; D ; E ; F نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)

لتكن S نقطة حيث $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BS}$ و S' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ)

1- بين أن $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{B'S'}$ و $\overrightarrow{E'F'}=\overrightarrow{A'S'}$

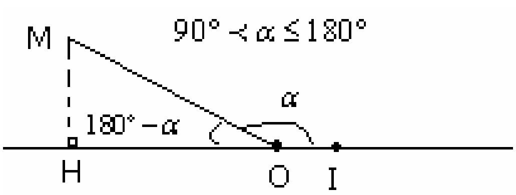
2- استنتج أن $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{E'F'}$

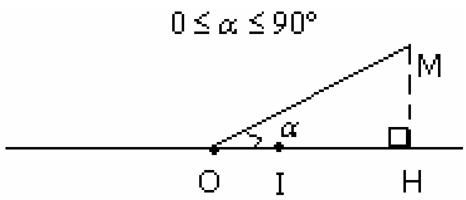


مبرهنة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C ; D ; E ; F نقط من
المستوى و A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)
إذا كان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ فان $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{E'F'}$

7- أفصول المسقط العمودي لنقطة على محور





خاصية

إذا كان H المسقط العمودي لنقطة M على المحور $D(O;I)$ حيث $(OI=1)$ و α قياس الزاوية
$(\widehat{IOM})$ فان أفصول H هو:

*- $OM\cos\alpha$ إذا كان $0 \leq \alpha \leq 90°$

*- $-OM\cos(180°-\alpha)$ إذا كان $90° \prec \alpha \leq 180°$

تمارين

تمرين1

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع ($\left[\widehat{DAB}\right]$ زاوية منفرجة) و E و F نقطتين

حيث $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

ليكن K تقاطع (AC) و (EF). نعتبر B' و D' مسقطا B و D على (AC) بتواز مع (EF)

1- بين أن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

2- بين أن $\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB'}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD'}$

3- عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AK}$

تمرين2

ليكن $ABCD$ شبه منحرف قاعدتيه $[AB]$ و $[CD]$ حيث $CD=2AB$ و I تقاطع قطريه.

نعتبر E مسقط I على (CD) بتواز مع (BC) و F مسقط I على (CD) بتواز مع (AD)

1- بين أن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

2- بين أن $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DF}$ استنتج أن $[EF]$ و $[CD]$ لهما نفس المنتصف

تمرين3

ليكن ABC مثلثا و M نقطة بحيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\alpha\in\mathbb{R}^{*}-\{1\}$. نعتبر N مسقط M على (AC) بتواز مع (BC) و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

ليكن I تقاطع (MN) و (AH)

1- بين أن $\overrightarrow{MN}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AI}=\alpha\cdot\overrightarrow{AH}$

2- بين أن $\frac{S}{S'}=\alpha^{2}$ حيث S و S' مساحتا المثلثين AMN و ABC على التوالي