الحساب المتجهي

القدرات المنتظرة

*- إنشاء متجهة من شكل $a\vec{u}+b\vec{v}$.

*- التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس.

*- حل مسائل هندسية باستعمال الأداة الهندسية.

I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

1- أنشطة

1- ليكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى

أنشئ M و N حيث $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ قارن $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{BD}$

2- ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه O

أنشئ M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و أنشئ I حيث $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$

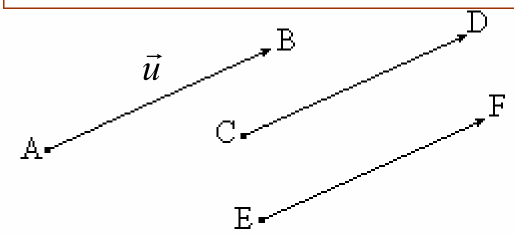
أثبت أن $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AO}$

3- ليكن A و B و C و D و E نقطا اختصر $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

2- تساوي متجهتين

ب- تعريف

تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



نكتب $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

ج- المتجهة المنعدمة

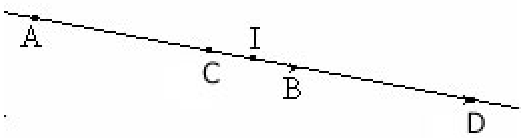
*- المتجهة المنعدمة $\vec{0}$: $\vec{0}=\overrightarrow{MM}$ لكل نقطة M نقطة من المستوى

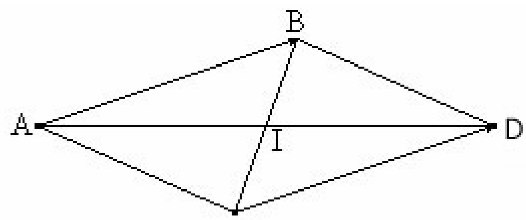
د – خاصيات

خاصية1

A و B و C و D أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف





I منتصف القطعتين $[AD]$ و $[BC]$

خاصية2

إذا كانت A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية في المستوى فان :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $ABDC$ متوازي الأضلاع

نتيجة

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

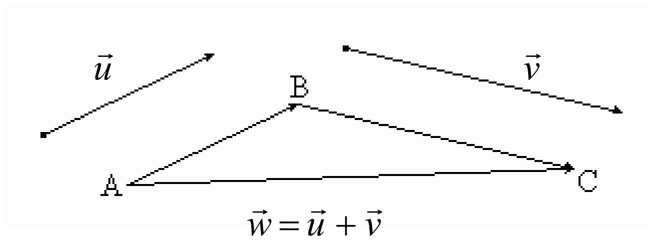
3- مجموع متجهتين –علاقة شال

أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في المستوى

لتكن A نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

النقطتان A و C تحددان متجهة وحيدة $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$



المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نكتب $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من المستوى

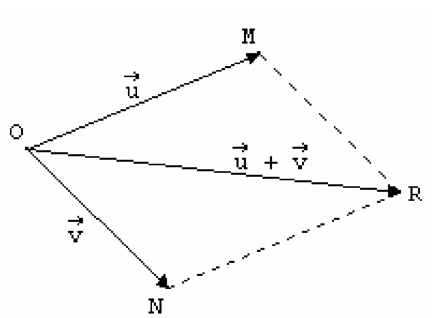
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

ب- نتيجة

لتكن O و M وN و R أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة



اذا كانت $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$ فان

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع

ج- خاصيات

*- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

*- لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

*- لكل متجهة $\vec{u}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

4- مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

تذكير لتكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ المسافة AB تسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ نكتب $\|\vec{u}\|=AB$

تعريف

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

*- لكل متجهة $\vec{u}$: $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

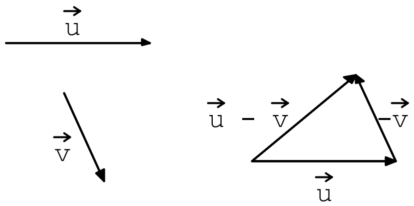
* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$



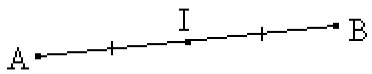
خاصية

لكل ثلاث نقط A و B و C $\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

5- منتصف قطعة

تعريف

I منتصف $\left[AB\right]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$



خاصية

I منتصف $\left[AB\right]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن B منتصف $\left[EF\right]$

II) ضرب متجهة في عدد حقيقي

أنشطة

نشاط 1

ليكن ABC مثلثا حيث $AB=6$ و M نقطة من $\left[AB\right]$ حيث $AM=2$

الموازي للمستقيم $\left(BC\right)$ و المار من M يقطع $\left[AC\right]$ في N

1- عبر عن MN بدلالة BC

2- عبر عن $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$

نشاط 2

ليكن ABC مثلثا نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

أنشئ $3\vec{u}$ و $-2\vec{v}$ و $3\vec{u}-2\vec{v}$

1 - تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم

جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :

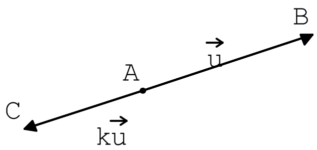
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه

* $\left\|k\vec{u}\right\|=\left|k\right|\times\left\|\vec{u}\right\|$

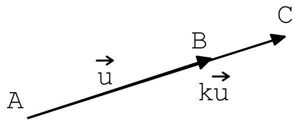
* منحى $k\vec{u}$ هو

منحى $\vec{u}$ إذا كان $k\succ 0$

عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k\prec 0$



$k\prec 0$



$k\succ 0$

2 - نتائج (نقبلها)

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان α و β فان

$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ $\quad$ $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$1\cdot\vec{u} = \vec{u}$ $\quad$ $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$

تمارين

1- بسط $\vec{A} = 5(2\vec{u}-\vec{v}) - \dfrac{3}{2}(\vec{u}+2\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{v})$

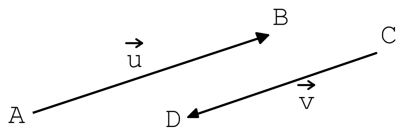
2- حدد x حيث $2x\cdot\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$ علما أن $\vec{u} \neq \vec{0}$

II) الاستقامية

1- استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين اذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

ب- خاصية و تعريف

لتكن A و B و C نقطا من المستوى حيث $A \neq B$

المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث

$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي α يسمى أفصول C في المعلم $(A;B)$

مثال

$\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$ $\quad$ -3 أفصول E في المعلم $(A;B)$

$\overrightarrow{CF} = \sqrt{2}\cdot\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\sqrt{2}$ أفصول F في المعلم $(C;D)$

تمرين

لتكن A و B و C و M أربع نقط و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

و $\vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$

1- بين أن $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2- بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ج- خاصية

I منتصف $[AB]$ تكافئ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ (و تكافئ أيضا $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$)

2- استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من المستوى حيث $A \neq B$

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث

$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

تمرين

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و P و Q نقطتين حيث $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AD}$

1- انشئ الشكل
2- عبر عن $\overrightarrow{CP}$ و $\overrightarrow{CQ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$
3- استنتج أن النقط P و Q و C مستقيمية

3- توازي مستقيمين

خاصية

لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى حيث $A \neq B$ و $C \neq D$
$(AB)//(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1- عبر عن $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
2- استنتج أن $(IC)//(BJ)$