

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: المعادلات والمتراجحات
والنظمات
المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك
تكنولوجي

أكاديمية
الجهة
الشرقية

تمرين 1: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$3(2x+5) = 6x-1 \quad (2) \quad -2x + 22 = 0 \quad (1)$$

$$9x^2 - 16 = 0 \quad (4) \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4) \quad (3)$$

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0 \quad (5)$$

الأجوبة: (1) $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x + 22 - 22 = -22$

$$-2x = -22 \quad \text{يعني}$$

$$-2x \times \left(\frac{1}{-2}\right) = -22 \times \left(\frac{1}{-2}\right) \quad \text{يعني}$$

يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$6x + 15 = 6x - 1 \quad \text{يعني} \quad 3(2x+5) = 6x - 1 \quad (2)$$

$$0 = -16 \quad \text{يعني} \quad 6x - 6x = -1 - 15 \quad \text{يعني} \quad 0x = -16$$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$4x - 8 = 6x - 2x - 8 \quad \text{يعني} \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4) \quad (3)$$

$$0 = 0 \quad \text{يعني} \quad 4x - 4x + 8 - 8 = 0$$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: $S = \mathbb{R}$

(4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

$$\text{طريقة 1: (التعميل)} \quad 9x^2 - 16 = 0 \quad \text{يعني} \quad (3x)^2 - 4^2 = 0$$

$$\text{يعني} \quad (3x-4)(3x+4) = 0 \quad \text{يعني} \quad 3x-4=0 \quad \text{أو} \quad 3x+4=0$$

$$\text{يعني} \quad 3x = -4 \quad \text{أو} \quad 3x = 4 \quad \text{يعني} \quad x = -\frac{4}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{4}{3}$$

$$\text{ومنه:} \quad S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{طريقة 2:} \quad 9x^2 - 16 = 0 \quad \text{يعني} \quad 9x^2 = 16 \quad \text{يعني} \quad x^2 = \frac{16}{9}$$

$$\text{يعني} \quad x = \sqrt{\frac{16}{9}} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{\frac{16}{9}} \quad \text{يعني} \quad x = \frac{4}{3} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{4}{3}$$

$$(5) \quad \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0 \quad \text{هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات}$$

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني} \quad x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{يعني} \quad x^2 - 3^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad (x-3)(x+3) = 0$$

$$\text{يعني} \quad x+3=0 \quad \text{أو} \quad x-3=0 \quad \text{يعني} \quad x = -3 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

$$\text{ومنه:} \quad D_E = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$$\text{المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة:} \quad \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$$

$$\text{يعني} \quad (x-7)(x+3) = 0 \quad \text{يعني} \quad x-7=0 \quad \text{أو} \quad x+3=0$$

$$\text{يعني} \quad x = 7 \in D_E \quad \text{أو} \quad x = -3 \notin D_E \quad \text{ومنه:} \quad S = \{7\}$$

تمرين 2: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$(1) \quad \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5}$$

$$(2) \quad x^3 - 7x = 0$$

$$(3) \quad (5x-7)^2 - (5x-7)(2x+3) = 0$$

$$(4) \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0$$

$$(5) \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

الأجوبة: (1) $\frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5}$ (نوجد المقامات)

$$\text{يعني} \quad \frac{5x+5}{10} + \frac{40}{10} = \frac{2x-5}{10} + \frac{4x+40}{10}$$

$$\text{يعني} \quad \frac{5x+5+40}{10} = \frac{2x-5+4x+40}{10}$$

$$\text{يعني} \quad 5x+5+40 = 2x-5+4x+40 \quad \text{يعني} \quad -x = -10$$

$$\text{يعني} \quad x = 10 \quad \text{ومنه:} \quad S = \{10\}$$

$$(2) \quad x^3 - 7x = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x^2 - 7) = 0 \quad \text{(التعميل)}$$

$$\text{يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 7 = 0 \quad \text{يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 = 7$$

$$\text{يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{7} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{ومنه:} \quad S = \{-\sqrt{7}, 0, \sqrt{7}\}$$

$$(3) \quad (5x-7)^2 - (5x-7)(2x+3) = 0$$

$$\text{يعني} \quad (5x-7)[(5x-7) - (2x+3)] = 0$$

$$\text{يعني} \quad (5x-7)(3x-10) = 0 \quad \text{يعني} \quad 5x-7=0 \quad \text{أو} \quad 3x-10=0$$

$$\text{يعني} \quad x = \frac{7}{5} \quad \text{أو} \quad x = \frac{10}{3} \quad \text{ومنه:} \quad S = \left\{\frac{7}{5}, \frac{10}{3}\right\}$$

$$(4) \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني} \quad x^2 - 16 \neq 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \quad \text{يعني} \quad x^2 - 4^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad (x-4)(x+4) = 0$$

$$\text{يعني} \quad x+4=0 \quad \text{أو} \quad x-4=0 \quad \text{يعني} \quad x = -4 \quad \text{أو} \quad x = 4$$

$$\text{ومنه:} \quad D_E = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0 \quad \text{يعني} \quad (x-1)(x+2) = 0$$

$$\text{يعني} \quad x-1=0 \quad \text{أو} \quad x+2=0$$

$$\text{يعني} \quad x = 1 \in D_E \quad \text{أو} \quad x = -2 \in D_E \quad \text{ومنه:} \quad S = \{-2, 1\}$$

$$(5) \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني} \quad x-2 \neq 0 \quad \text{و} \quad x+2 \neq 0$$

$$\text{يعني} \quad x \neq 2 \quad \text{و} \quad x \neq -2$$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدى للقيم التي يندمج فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$2x-3$	-	-	0	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	-	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (4)$$

$(1-x)(2x+4) = 0$ يعني $1-x=0$ أو $2x+4=0$ يعني

$$x=1 \text{ أو } x=-2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$(1-x)(2x+4)$	-	0	+	-

و منه فان : $S =]-2; 1[$

$$\frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \quad (5) \quad \text{المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة}$$

المتراجحة لها معنى يعني $1+3x \neq 0$ يعني $x \neq -\frac{1}{3}$

$$D_I = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة

$$5x-2=0 \text{ يعني } x=\frac{2}{5} \quad 1+3x=0 \text{ يعني } x=-\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$1+3x$	-	0	+	+
$5x-2$	-	-	0	+
$\frac{5x-2}{1+3x}$	+	-	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{5}; +\infty[$

$$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0 \quad (6)$$

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6 \neq 0$ يعني $x \neq 3$ ومنه:

$$D_I = \mathbb{R} - \{3\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة : $5x-10=0$ يعني $x=2$

$$2x+1=0 \text{ يعني } x=-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$5x-10$	-	-	0	+	+
$2x-6$	-	-	-	0	+
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$	-	0	+	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [2; 3[$

$$D_E = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة : } \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2} \text{ يعني}$$

$$(x+1)(x-2) = (x-5)(x+2)$$

$$x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 5x + 2x - 10 \text{ يعني}$$

$$x = -4 \in D_E \text{ يعني } 2x = -8 \text{ يعني } -x + 3x = -10 + 2$$

$$S = \{-4\}$$

تمرين 3: حدد إشارة الحدانيات التالية :

$$2x+1 \quad (1)$$

$$-x+2 \quad (2)$$

$$\text{الأجوبة: (1) } 2x+1=0 \text{ يكافئ } x=-\frac{1}{2}$$

و بما أن $a=2$ و $a>0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

$$(2) \text{ لنحدد إشارة } -x+2$$

$$-x+2=0 \text{ يكافئ } x=2$$

و بما أن: $a=-1$ و $a<0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	-	0	+

تمرين 4:

حل في \mathbb{R} المتراجحة التالية : $3x+6 \geq 0$

$$\text{الجواب: } 3x+6=0 \text{ يكافئ } x=-2$$

و بما أن: $3x+6 \geq 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	-	0	+

و منه فان : $S = [-2; +\infty[$

تمرين 5: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

$$(1) -2x+12 > 0$$

$$(2) 5x-15 \leq 0$$

$$(3) 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$(4) (1-x)(2x+4) > 0$$

$$(5) \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0$$

$$(6) \frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0$$

$$\text{الأجوبة: (1) } -2x+12 > 0$$

$$-2x+12=0 \text{ يكافئ } x=6$$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	+	0	-

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

$$(2) 5x-15 \leq 0$$

$$5x-15=0 \text{ يكافئ } x=3$$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	-	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; 3[$

$$(3) 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \text{ يعني } (2x)^2 - 3^2 = 0 \text{ يعني } (2x-3)(2x+3) = 0$$

$$\text{يعني } 2x+3=0 \text{ أو } 2x-3=0 \text{ يعني } x=-\frac{3}{2} \text{ أو } x=\frac{3}{2}$$

تمرين 6:

(1) هل العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$ ؟

(2) هل العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ ؟

الأجوبة: (1) العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$

لأن: $3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$

(2) العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

لأن: $(\sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$

تمرين 7: حدد الشكل القانوني للحدودية: $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$

الجواب: لدينا $P(x) = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$

بالتالي $2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$

هو الشكل القانوني لثلاثية الحدود $2x^2 + 5x + 2$.

تمرين 8: حدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2 + 6x + 15$

الجواب: لدينا: $2x^2 + 6x + 15 = 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}\right)$

$= 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}\right)$

تمرين 9: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$3x^2 + x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (3)$$

الأجوبة: (1) المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حل في \mathbb{R}

لأن $\Delta < 0$ ($\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$) و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$.

(2) المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد

لأن $\Delta = 0$ ($\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$).

حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a} = 5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

(3) نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$.S = \{1; 2\} \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و } x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

تمرين 10: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (2) \quad 6x^2 - 7x - 5 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (4) \quad 3x^2 + x + 2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 5x + 7 = 0 \quad (6) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \quad (8) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (7)$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (9)$$

الأجوبة: (1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ و $a = 6$ و $b = -7$ و $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{ يعني } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$c = 1 \text{ و } b = -2\sqrt{2} \text{ و } a = 2 \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو:

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \text{ ومنه: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c = 2 \text{ و } b = 1 \text{ و } a = 3 \quad 3x^2 + x + 2 = 0 \quad (3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه: $S = \emptyset$

$$c = 3 \text{ و } b = -8 \text{ و } a = 4 \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4} \text{ و } x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$c = 2 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 1 \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (5)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1}$$

$$S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$$

$$c = 7 \text{ و } b = 5 \text{ و } a = 1 \quad x^2 + 5x + 7 = 0 \quad (6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه: $S = \emptyset$

$$c = 6 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 2 \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (7)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه: $S = \emptyset$

$$c = -21 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 1 \quad x^2 - 4x - 21 = 0 \quad (8)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$S = \{-3, 7\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$c = 3 \text{ و } b = -6 \text{ و } a = 3 \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو:

$$S = \{1\} \text{ ومنه: } x = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ يعني } x = \frac{-b}{2a}$$

تمرين 11: نعتبر المعادلة $20015x^2 - 2016x + 1 = 0$ (E)

بين أن العدد 1 حل للمعادلة (E) ثم حدد الحل الثاني.

الأجوبة: نعوض $x = 1$ في المعادلة (E) فنجد:

$$(E) \quad 20015x^2 - 2016x + 1 = 0 \quad \text{ومنه } 1 \text{ حل لـ } (E)$$

حسب الخاصية السابقة لدينا: $x_1 \times x_2 = \frac{1}{20015}$ ولدينا $x_1 = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = (1)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \text{ يعني } x_1 = 1 \text{ و } x_2 = 2$$

$$\text{ومنه التعميل : } x^2 - 3x - 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$$

$$(3) \quad 3x^2 + x + 2 \text{ لدينا:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

ومنه فإن هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 15: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

$$(1) \quad 2x^2 - 4x + 6 \quad (2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \quad (3) \quad 3x^2 - 6x + 3$$

$$\text{أجوبة : (1) } 2x^2 - 4x + 6 = 0 : a = 2 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 16 - 48 = -32 < 0$$

ومنه فإن هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

$$(2) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad a = 4 \text{ و } b = -8 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{8 + 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه التعميل : } 4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (4x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 3 \text{ بما أن } \Delta = 0 \text{ فإن هذه الحدودية لها جذر}$$

$$\text{وحيد هو : } x_1 = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = 1$$

$$\text{ومنه التعميل : } 3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x - 1)^2$$

تمرين 16:

$$1. \text{ أدرس إشارة الحدودية } P(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$2. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة : } 2x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$\text{أجوبة : (1) } P(x) = 2x^2 - 3x + 1 : a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن للحدودية جذرين هما:

$$\text{ومنه : } x_1 = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3 + 1}{4} = 1$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	+

$$(2) \text{ حل المتراجحة : } S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

تمرين 17:

$$1. \text{ أدرس إشارة الحدودية } P(x) = -2x^2 + 4x - 2$$

$$2. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة : } -2x^2 + 4x - 2 > 0$$

$$\text{أجوبة : (1) } P(x) = -2x^2 + 4x - 2 : a = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

$$\text{بما أن } \Delta = 0 \text{ فإن هذه الحدودية لها جذر وحيد هو : } x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = -1$$

$$\text{اذن : } x_2 = \frac{1}{2015} \text{ يعني } 1 \times x_2 = \frac{1}{2015}$$

$$\text{تمرين 12: نعتبر المعادلة : } -2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0 : (E)$$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما

$$2. \text{ استنتج قيم ما يلي : } \alpha + \beta \text{ و } \alpha \times \beta \text{ و } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \text{ و } \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{و } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \text{ و } \alpha^3 + \beta^3$$

$$\text{الأجوبة : (1) } -2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0 \text{ اذن : } a = -2 \text{ و } b = \sqrt{2} \text{ و } c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 2 + 16 = 18 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين : α و β

$$(2) \text{ حسب خاصية لدينا : } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ و } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{ومنه : } \alpha + \beta = -\frac{\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \alpha \times \beta = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{و لدينا : } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 \text{ يعني } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{يعني } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \text{ يعني } \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(-1)$$

$$\text{ولدينا : } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} \text{ اذن : } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\text{ونعلم أن : } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{اذن : } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = \frac{\sqrt{2}^3}{2^3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{8} = \frac{14\sqrt{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

تمرين 13: عمل ثلاثية الحدود التالية ان أمكن :

$$R(x) = 6x^2 - x - 1$$

$$\text{الجواب : مميز الحدودية } R(x) \text{ هو } \Delta = 1 + 24 = 25$$

$$\text{اذن جذرا الحدودية : هما } x_1 = \frac{1 + 5}{12} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1 - 5}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{و بالتالي : } R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

تمرين 14: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

$$(1) \quad x^2 - 10x + 25 \quad (2) \quad x^2 - 3x + 2 \quad (3) \quad 3x^2 + x + 2$$

$$\text{أجوبة : (1) } x^2 - 10x + 25 : a = 1 \text{ و } b = -10 \text{ و } c = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{ومنه التعميل : } x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 3x + 2 \quad a = 1 \text{ و } b = -3 \text{ و } c = 2$$

$$x=3 \text{ : إذن } 2 \times 3 + 3 \times y = 2 \text{ يعني } y = -\frac{4}{3} \text{ : إذن } \left(3, -\frac{4}{3}\right) \in S$$

$$x=4 \text{ : إذن } 2 \times 4 + 3 \times y = 2 \text{ يعني } y = -2 \text{ : إذن } (4, -2) \in S$$

$$2x + 3y = 2 \text{ يعني } 3y = -2x + 2 \text{ يعني } y = \frac{-2x+2}{3}$$

$$S = \left\{ \left(x; \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\} \text{ : إذن } y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \text{ يعني}$$

تمرين 21: حل في \mathbb{R}^2 المعادلات التالية :

$$(1) \quad 2x - 8y + 10 = 0 \quad (2) \quad -3x + 12y - 2 = 0$$

$$(3) \quad 7x - 14y + 1 = 0$$

$$(1) \text{ **أجوبة:** } 2x - 8y + 10 = 0 \text{ يعني } 2y = 8x - 10 \text{ يعني } y = \frac{8x-10}{2}$$

$$\text{يعني } y = 4x - 5 \text{ : إذن } S = \{(x; 4x - 5) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$(2) \quad -3x + 12y - 2 = 0 \text{ يعني } 12y = 3x + 2 \text{ يعني } y = \frac{3x+2}{12}$$

$$\text{يعني } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \text{ : إذن } S = \left\{ \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(3) \quad 7x - 14y + 1 = 0 \text{ يعني } 7x = 14y - 1 \text{ يعني } x = \frac{14y-1}{7}$$

$$\text{يعني } x = 2y - \frac{1}{7} \text{ : إذن } S = \left\{ \left(2y - \frac{1}{7}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين 22: حل في \mathbb{R}^2 المعادلات التالية :

$$1) \quad 2x - y + 1 = 2y - 2x + 5 \quad 2) \quad x + 5 = y + 5$$

$$3) \quad 3x + 2y - 2 = 2y - 2 \quad 4) \quad x + y = 2x - 1$$

$$(1) \text{ **أجوبة:** } 2x - y + 1 = 2y - 2x + 5 \text{ يعني } 4x = 3y + 4$$

$$4x - 3y - 4 = 0 \text{ يعني } 4x = 3y + 4$$

$$\text{يعني } x = \frac{3}{4}y + 1 \text{ ومنه } S = \left\{ \left(\frac{3}{4}y + 1; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(2) \quad x + 5 = y + 5 \text{ يعني } y = x$$

$$\text{ومنه } S = \{(x; x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$(3) \quad 3x = 0 \text{ يعني } 3x + 2y - 2 = 2y - 2 \text{ يعني } 3x = 0$$

$$\text{ومنه } S = \{(0; y) / y \in \mathbb{R}\}$$

$$(4) \quad x + y = 2x - 1 \text{ يعني } -x + y + 1 = 0$$

$$\text{يعني } y = x - 1 \text{ ومنه } S = \{(x; x - 1) / x \in \mathbb{R}\}$$

تمرين 23: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث :

$$P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

$$1. \text{ بين أن } -1 \text{ هو جذر للحدودية } P(x)$$

$$2. \text{ بين أن } P(x) = (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2})$$

$$\text{نضع : } Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$3. \Delta = (\sqrt{2}-1)^2 \text{ هو مميز ثلاثية الحدود } Q(x) \text{ تأكد أن}$$

$$4. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } Q(x) = 0$$

$$5. \text{ استنتج حلول المعادلة : } x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

$$6. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } P(x) = 0$$

$$7. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة : } P(x) \leq 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	$-$	0	$-$

(2) حل المتراجحة : $S = \mathbb{R}$

تمرين 18:

$$(1) \text{ أدرس إشارة الحدودية } P(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة : } 3x^2 + 6x + 5 < 0$$

$$(1) \text{ **أجوبة:** } P(x) = 3x^2 + 6x + 5 \quad a = 3 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0 \text{ ومنه:}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	$+$	$+$

(2) حل المتراجحة : $S = \emptyset$

تمرين 19:

حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية :

$$(1) \quad 2x^2 - 4x + 6 \geq 0 \quad (2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

$$(1) \text{ **أجوبة:** } 2x^2 - 4x + 6 \geq 0 \quad a = 3 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	$+$	$+$

ومنه: $S = \mathbb{R}$

$$(2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 \quad a = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ ومنه:}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$(3) \quad x^2 - 3x - 10 < 0 \quad a = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = 5 \text{ و } x_2 = -2 \text{ ومنه:}$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-2, 5[$$

تمرين 20: نعتبر في المجموعة \mathbb{R}^2 المعادلة : $2x + 3y = 2$

$$(1) \text{ تأكد أن الزوج } \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ حل للمعادلة : } 2x + 3y = 2$$

$$(2) \text{ اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة : } 2x + 3y = 2$$

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \text{ المعادلة : } 2x + 3y = 2$$

$$(1) \text{ **أجوبة:** } 2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3} = 2 \text{ : إذن } \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ حل للمعادلة}$$

$$(2) \text{ : إذن } x = 2 \text{ : } 2 \times 2 + 3 \times y = 2 \text{ يعني } y = -\frac{2}{3} \text{ : إذن } \left(2, -\frac{2}{3}\right) \in S$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 (2)$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$P(x) = x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} \quad (3)$$

بما أن $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ فان للمعادلة حلين هما:

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

(4)

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	+

$$S =]-\infty, -2\sqrt{3}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

$$x + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0 \quad (5)$$

يمكن كتابتها على الشكل: $(\sqrt{x})^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$

نضع: $X = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل:

$$X^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})X - 2\sqrt{6} = 0$$

حسب السؤال السابق: $X_1 = \sqrt{2}$ أو $X_2 = -2\sqrt{3}$

يعني $\sqrt{x_1} = \sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$

نلاحظ أن المعادلة: $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$ ليس لها حل لأن الجذر دائما موجب

ومنه $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2$ يعني $x_1 = 2$ ومنه $S = \{2\}$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \quad \text{تمارين 25: حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظام التالية:}$$

باستعمال طريقة التعويض

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$$y = 10 - 4x \text{ يعني } 4x + y = 10$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$\text{يعني } -13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \quad \text{تمارين 26: حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظام التالية:}$$

باستعمال طريقة التآلفية الخطية

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على:

$$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$-13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

تمارين 27: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \text{ باستعمال طريقة المحددة}$$

$$P(-1) = (-1)^3 - \sqrt{2}(-1)^2 - (-1) + \sqrt{2} \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$P(-1) = -1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$$

اذن -1 هو جذر للحدودية

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) = x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$= x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x - x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2} \quad (3)$$

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times 1 + (1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \quad (4)$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, 1\} \quad \text{ومنه:} \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0 \quad (5)$$

يمكن كتابتها على الشكل: $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

نضع: $X = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل:

$$X^2 - (\sqrt{2}+1)X + \sqrt{2} = 0 \text{ حسب السؤال السابق: } X_1 = \sqrt{2} \text{ أو } X_2 = 1$$

يعني $\sqrt{x_1} = \sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2} = 1$

$$\text{يعني } (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2 \text{ أو } (\sqrt{x_2})^2 = (1)^2$$

يعني $x_1 = 2$ أو $x_2 = 1$ $S = \{2, 1\}$

$$P(x) = 0 \text{ يعني } x+1=0 \text{ أو } x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0 \quad (6)$$

يعني $x = -1$ أو $x_1 = \sqrt{2}$ أو $x_1 = 1$ ومنه: $S = \{-1, 1, \sqrt{2}\}$

$$P(x) \leq 0 \text{ يعني } (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) \leq 0 \quad (7)$$

x	$-\infty$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$	+	+	0	-	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$S =]-\infty, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

تمارين 24: نعتبر المعادلة: $x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} = 0$

1. نضع Δ : هو مميز ثلاثية الحدود $P(x)$ تأكد أن

$$\Delta = 14 + 4\sqrt{6}$$

2. املا الفراغات التالية: $14 + 4\sqrt{6} = (\dots + \dots)^2$

3. حل في \mathbb{R} المعادلة $P(x) = 0$

4. حل في \mathbb{R} المتراجحة: $P(x) > 0$

5. استنتج حلول المعادلة: $x + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6} \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

الجواب : طريقة المحددة:

محددة النظام (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

$$S = \{(2,1)\} \text{ هو } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1 \text{ و منه: } y = \frac{1}{2} \text{ و } x = \frac{15}{2}$$

تمرين 28: باستعمال طريقة مناسبة

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية :

$$(1) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases}$$

أجوبة: (1) محددة النظام هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x - 2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow$$

ومنه النظام (S) لها عدد لا منته من الحلول:

$$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

وهذا غير ممكن ومنه $S = \emptyset$

$$(3) \begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases}$$

محددة النظام هي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Delta = (5 - 3) - (2 - 1) = 1 \neq 0 \text{ اذن } \Delta = ((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2) - ((\sqrt{2})^2 - (1)^2)$$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} - 1 \\ 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{1} = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2} \text{ هو}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} + 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{1} = -\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$S = \{(1 - \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{5})\} \text{ و منه:}$$

$$(4) \begin{cases} x + y = 11 \\ (x + y)(x - y) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ 11(x - y) = 44 \end{cases}$$

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$$x = \frac{15}{2} \text{ يعني } 2x = 15 \text{ يعني } x + y + x - y = 11 + 4$$

ونعوض $x = \frac{15}{2}$ في المعادلة $x + y = 11$ فنجد

$$\frac{15}{2} + y = 11$$

$$S = \left\{ \left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\} \text{ أي } y = \frac{7}{2} \text{ و منه:}$$

تمرين 29: (1) حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$(2) \text{ استنتج حلول النظام التالية : } \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0 \text{ هي: (1) محددة النظام (1) هي:}$$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

$$S = \left\{ \left(-\frac{14}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\} \text{ و منه: } y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{2}{23} \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{23}$$

(2) لكي تكون للنظام معنى يجب أن يكون لدينا $x \neq 0$ و $y \neq 0$

$$\text{نضع: } Y = \frac{1}{y} \text{ و } X = \frac{1}{x} \begin{cases} -7\frac{1}{x} - 3\frac{1}{y} = 4 \\ 4\frac{1}{x} + 5\frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases} \text{ فنحصل على النظام التالية: } \begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases}$$

$$\text{وسبق أن قمنا بحل هذه النظام: } X = -\frac{14}{23} \text{ و } Y = -\frac{2}{23}$$

$$\text{و منه: } \frac{1}{x} = -\frac{14}{23} \text{ و } \frac{1}{y} = -\frac{2}{23} \text{ يعني: } x = -\frac{23}{14} \text{ و } y = -\frac{23}{2}$$

$$\text{و بالتالي: } S = \left\{ \left(-\frac{23}{14}, -\frac{23}{2} \right) \right\}$$

تمرين 30: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} \frac{5}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{أجوبة: نضع: } Y = \frac{1}{y-2} \text{ و } X = \frac{1}{x-1}$$

$$y \neq 1 \text{ و } x \neq 1$$

$$\text{فنحصل على النظام التالية: } \begin{cases} 5X + 3Y = 4 \\ -2X + Y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ونقوم بحل هذه النظام ونجد: } X = \frac{1}{11} \text{ و } Y = \frac{13}{11}$$

$$\text{و منه: } \frac{1}{x-1} = \frac{1}{11} \text{ و } \frac{1}{y-2} = \frac{13}{11}$$

$$\text{يعني: } x - 1 = 11 \text{ و } y - 2 = \frac{11}{13} \text{ يعني: } x = 12 \text{ و } y = \frac{37}{13}$$

$$\text{و بالتالي: } S = \left\{ \left(12, \frac{37}{13} \right) \right\}$$

الجواب: نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $2x - y - 2 = 0$

إذا كانت $x = 0$ فإن $2 \times 0 - y - 2 = 0$ أي $y = -2$

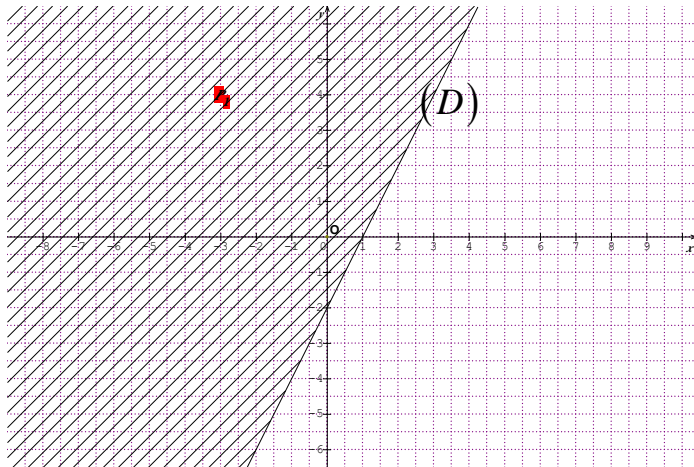
إذا كانت $x = 1$ فإن $2 \times 1 - y - 2 = 0$ أي $y = 0$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0; -2)$ و $B(1; 0)$

بالنسبة للنقطة $O(0; 0)$ $2 \times 0 - 0 - 2 < 0$ يحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف

المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي يضم النقطة $O(0; 0)$



تمرين 35: حل مبيانيا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$x - y - 3 \geq 0$$

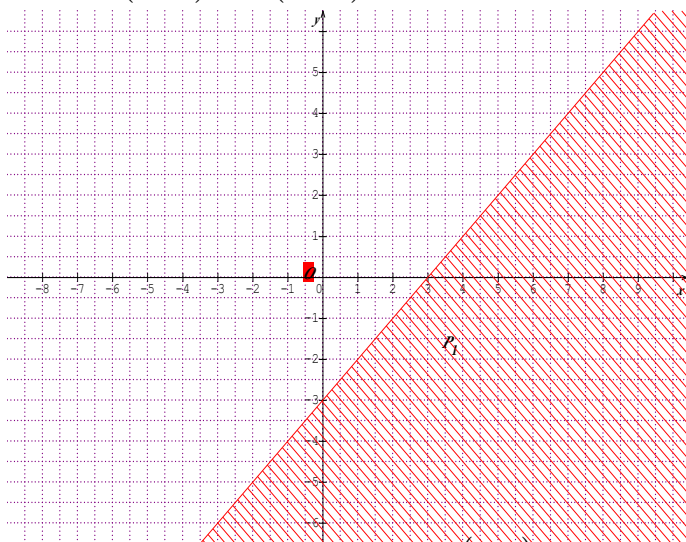
الجواب:

نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $x - y - 3 = 0$

إذا كانت $x = 0$ فإن $0 - y - 3 = 0$ أي $y = -3$

إذا كانت $x = 1$ فإن $1 - y - 3 = 0$ أي $y = -2$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0; -3)$ و $B(1; -2)$



بالنسبة للنقطة $O(0; 0)$ $0 - 0 - 3 \geq 0$ لا تحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى

نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة

$O(0; 0)$

تمرين 31: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ -3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 17 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X = \sqrt{x}$ و $Y = \sqrt{y}$

$$\begin{cases} 2X + Y = 6 \\ -3X + 5Y = 17 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد: $X = 1$ و $Y = 4$

و منه: $\sqrt{x} = 1$ و $\sqrt{y} = 4$ يعني: $(\sqrt{x})^2 = 1^2$ و $(\sqrt{y})^2 = 4^2$

يعني: $x = 1$ و $y = 16$ وبالتالي: $S = \{(1, 16)\}$

تمرين 32: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X = x^2$ و $Y = y^2$

$$\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد: $X = 3$ و $Y = 1$

و منه: $x^2 = 3$ و $y^2 = 4$

يعني: $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ و $y = \sqrt{1}$ او $y = -\sqrt{1}$

يعني: $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ و $y = 1$ او $y = -1$

و بالتالي: $S = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)\}$

تمرين 33: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} (x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 5x + 4) = -3 \\ 2(x^2 - 3x + 1) - 3(y^2 - 5x + 4) = 4 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X = x^2 - 3x + 1$ و $Y = y^2 - 5x + 4$

$$\begin{cases} X + Y = -3 \\ 2X - 3Y = 4 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد: $X = -1$ و $Y = -2$

و منه: $x^2 - 3x + 1 = -1$ و $y^2 - 5x + 4 = -2$

يعني: $x^2 - 3x + 2 = 0$ و $y^2 - 5x + 6 = 0$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

نحل المعادلة: $y^2 - 5x + 6 = 0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$y_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \text{ و } y_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

و بالتالي: $S = \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 2)\}$

تمرين 34: حل مبيانيا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$2x - y - 2 < 0$$

تمرين 36: حل مبيانيا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$2x - y < 0$$

الجواب:

نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $2x - y = 0$

إذا كانت $x = 0$ فإن $y = 0$

إذا كانت $x = 1$ فإن $y = 2$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $O(0;0)$ و $A(1;2)$

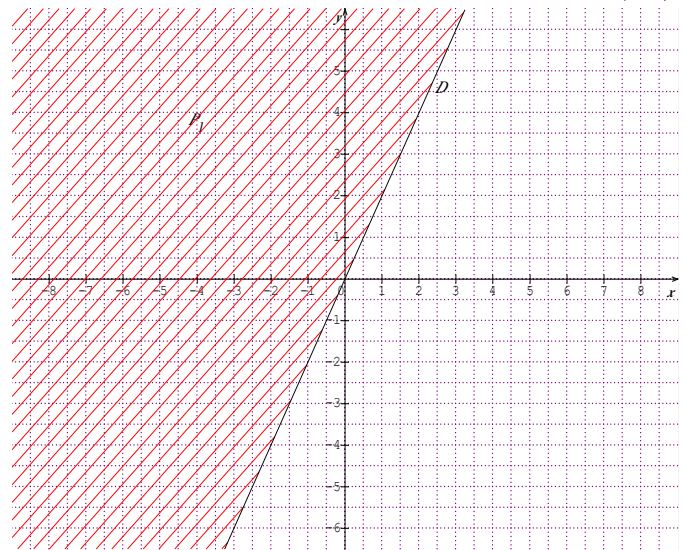
نأخذ نقطة أخرى عشوائياً مثلاً $B(1;1)$

لدينا $2 \times 1 - 1 < 0$ يعني $1 < 0$ ومنه احداثيات $B(1;1)$ لا

تحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة

$$B(1;1)$$



تمرين 37: حل مبيانيا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$3x + 2y < 2x + 2y - 1$$

الجواب: $3x + 2y < 2x + 2y - 1$ تعني

$$x + 1 < 0 \text{ تعني } 3x - 2x + 2y - 2y + 1 < 0$$

نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $x + 1 = 0$

$$x + 1 = 0 \text{ تعني } x = -1$$

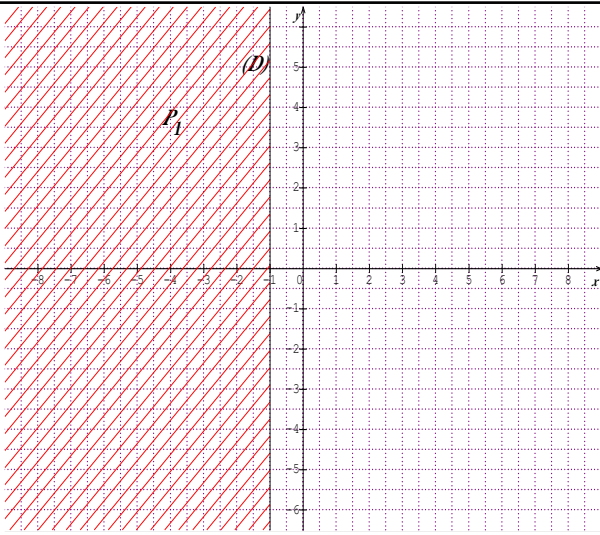
نأخذ نقطة أخرى عشوائياً مثلاً $O(0;0)$

لدينا $0 + 1 < 0$ يعني $1 < 0$ ومنه احداثيات $O(0;0)$ لا تحقق

المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة

$$O(0;0)$$



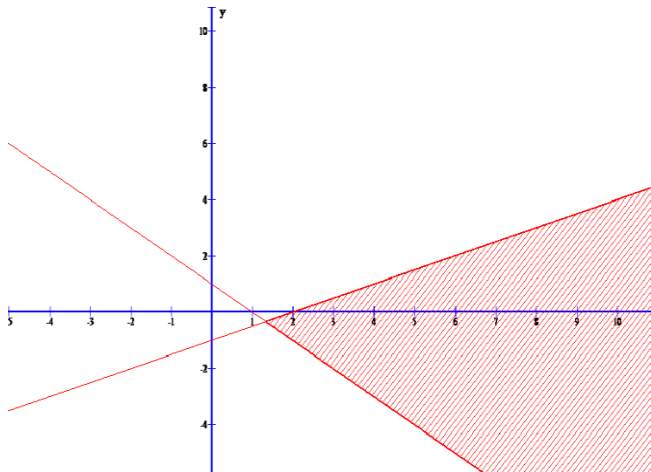
تمرين 38: حل مبيانيا النظام التالية:

$$(S_1) \begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ -x + 2y + 2 < 0 \end{cases}$$

الجواب: نرسم أولاً المستقيمتين التالية :

$$x + y - 1 = 0; -x + 2y + 2 = 0$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبياني:



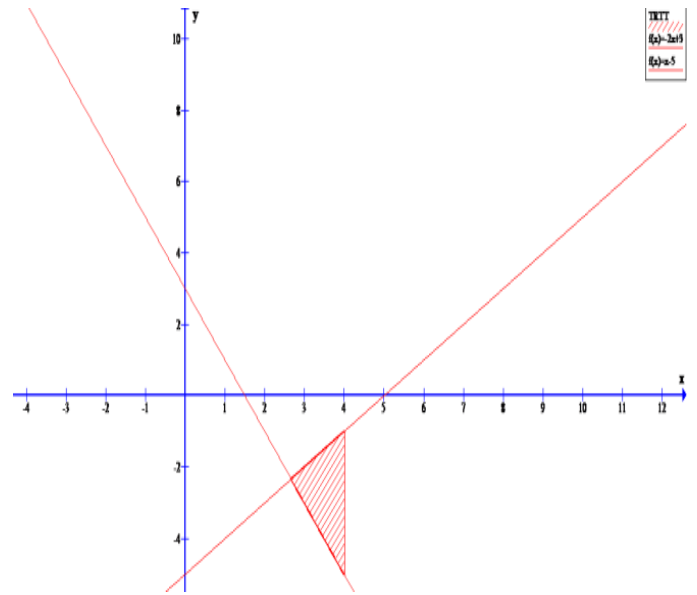
تمرين 39: حل مبيانيا النظام التالية:

$$(S) \begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ -x + y + 5 < 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

الجواب: نرسم أولاً المستقيمتين التالية :

$$2x + y - 3 = 0; -x + y + 5 = 0; x = 4$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبياني:

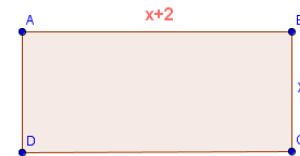


تمرين 40 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد

عن عرضه ب $2cm$

وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب:



ليكن x وعرض مستطيل أن طوله هو $x + 2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x + 2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad : \quad a = 1 \quad \text{و} \quad c = -15 \quad \text{و} \quad b = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2 \times 1} = -5 < 0 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + 8}{2 \times 1} = 3$$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x = 3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

