

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: المعادلات والمتراجفات
والنظم
المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك
تكنولوجي

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$x^3 - 7x = 0 \quad (2)$$

$$(5x - 7)^2 - (5x - 7)(2x + 3) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 16} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2} \quad (5)$$

الأجوبة: (1: نوح المقامات)

$$\frac{5x+5}{10} + \frac{40}{10} = \frac{2x-5}{10} + \frac{4x+40}{10}$$

$$\frac{5x+5+40}{10} = \frac{2x-5+4x+40}{10}$$

$$-x = -10 \quad \text{يعني } 5x+5+40 = 2x-5+4x+40$$

$$S = \{10\} \quad \text{يعني } x = 10 \quad \text{ومنه:}$$

$$x(x^2 - 7) = 0 \quad (2) \quad \text{يعني } x^3 - 7x = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \quad \text{أو } x^2 - 7 = 0 \quad \text{يعني } x = 0 \quad \text{أو } x = 7$$

$$S = \{-\sqrt{7}, 0, \sqrt{7}\} \quad \text{يعني } x = 0 \quad \text{أو } x = -\sqrt{7} \quad \text{أو } x = \sqrt{7} \quad \text{ومنه:}$$

$$(5x - 7)^2 - (5x - 7)(2x + 3) = 0 \quad (3)$$

$$(5x - 7)[(5x - 7) - (2x + 3)] = 0$$

$$3x - 10 = 0 \quad \text{يعني } 5x - 7 = 0 \quad \text{أو } 5x - 7 = 10$$

$$S = \left\{ \frac{7}{5}, \frac{10}{3} \right\} \quad \text{يعني } x = \frac{10}{3} \quad \text{أو } x = \frac{7}{5} \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 16} = 0 \quad (4)$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولاً مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x^2 - 16 \neq 0$$

$$(x-4)(x+4) = 0 \quad \text{يعني } x^2 - 16 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{أو } x = -4 \quad \text{يعني } x = 4 \quad \text{أو } x = -4$$

$$D_E = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة

$$(x-1)(x+2) = 0 \quad \text{يعني } \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 16} = 0$$

$$x+2 = 0 \quad \text{أو } x-1 = 0 \quad \text{يعني } x = -2 \quad \text{أو } x = 1$$

$$S = \{-2, 1\} \quad \text{يعني } x = -2 \in D_E \quad \text{أو } x = 1 \in D_E \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2} \quad (5)$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولاً مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x-2 \neq 0 \quad \text{و } x \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq 2 \quad \text{و } x \neq -2$$

تمرين 1: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$3(2x+5) = 6x-1 \quad (2) \quad -2x+22=0 \quad (1)$$

$$9x^2-16=0 \quad (4) \quad 4(x-2)=6x-2(x+4) \quad (3)$$

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2 - 9} = 0 \quad (5)$$

الأجوبة: (1: يعني $-2x+22=0$)

يعني $-2x=-22$

$$-2x \times \left(\frac{1}{-2} \right) = -22 \times \left(\frac{1}{-2} \right) \quad \text{يعني}$$

يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$6x+15=6x-1 \quad \text{يعني } 3(2x+5) = 6x-1 \quad (2)$$

$$0 = -16 \quad \text{يعني } 6x-6x = -1-15 \quad (3)$$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$4x-8=6x-2x-8 \quad \text{يعني } 4(x-2) = 6x-2(x+4) \quad (3)$$

يعني $4x-4x+8-8=0$ $0 = 0$ **يعني** $0 = 0$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي

(4) أماماً معادلة من الدرجة الثانية

$$\text{طريقة 1: (التعليب)} \quad (3x)^2 - 4^2 = 0 \quad \text{يعني } 9x^2 - 16 = 0$$

$$3x-4=0 \quad 3x+4=0 \quad \text{يعني } 3x+4 = 0 \quad \text{أو } 3x-4 = 0$$

$$x = \frac{4}{3} \quad \text{أو } x = -\frac{4}{3} \quad \text{يعني } 3x = -4 \quad \text{أو } 3x = 4$$

$$S = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\} \quad \text{ومنه:}$$

$$\text{طريقة 2: } 9x^2 - 16 = 0 : 2 \quad \text{يعني } 9x^2 = 16$$

$$x = -\frac{4}{3} \quad \text{أو } x = \frac{4}{3} \quad \text{يعني } x = \sqrt{\frac{16}{9}} \quad x = \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2 - 9} = 0 \quad (5) \quad \text{هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات}$$

المرحلة 1: نحدد أولاً مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x^2 - 9 \neq 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0 \quad \text{يعني } x^2 - 9 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{أو } x = -3 \quad \text{يعني } x = 3 \quad \text{أو } x = -3$$

$$D_E = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2 - 9} = 0 \quad \text{الحل الفعلي للمعادلة:}$$

$$x+3=0 \quad \text{أو } x-7=0 \quad \text{يعني } (x-7)(x+3) = 0$$

$$S = \{7\} \quad \text{ومنه: } x = -3 \notin D_E \quad \text{أو } x = 7 \in D_E$$

تمرين 2: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$\frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5} \quad (1)$$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزادي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	—	0	+	+
$2x-3$	—	—	0	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	—	0

$$S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 2x+4=0 &\text{ يعني } x=-2 \\ (1-x)(2x+4)=0 &\text{ يعني } x=1 \text{ أو } x=-1 \\ x=1 &\text{ أو } x=-2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	—	0	+	+
$1-x$	+	—	0	—
$(1-x)(2x+4)$	—	0	+	0

$$\text{و منه فان: } S =]-2; 1[$$

$$\text{المرحلة 1: نحدد أولاً مجموعة تعريف المتراجحة } \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{المتراجحة لها معنى يعني } 1+3x \neq 0 \text{ يعني } x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\text{و منه: } D_I = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة

$$x = -\frac{1}{3} \text{ يعني } 1+3x=0 \quad x = \frac{2}{5} \text{ يعني } 5x-2=0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$1+3x$	—	0	+	+
$5x-2$	—	—	0	+
$\frac{5x-2}{1+3x}$	+	—	0	+

$$S = \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

$$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0 \quad (6)$$

المرحلة 1: نحدد أولاً مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6 \neq 0$ يعني $x \neq 3$ ومنه:

$$D_I = \mathbb{R} - \{3\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة: $0 = 5x - 10 = 2x + 10$ يعني $x = 2$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ يعني } 2x+1=0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x+1$	—	0	+	+	+
$5x-10$	—	—	0	+	+
$2x-6$	—	—	—	0	+
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$	—	0	+	0	—

$$S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[2; 3 \right[$$

$$\text{و منه: } D_E = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة: } \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

$$(x+1)(x-2) = (x-5)(x+2)$$

$$x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 5x + 2x - 10$$

$$\text{يعني } x = -4 \in D_E \text{ يعني } 2x = -8$$

$$\text{و منه: } S = \{-4\}$$

تمرين 3: حدد إشارة الحداثيات التالية:

$$2x+1 > 0 \quad (1)$$

$$-x+2 < 0 \quad (2)$$

$$\text{الأجوبة: } (1) \text{ يكافي } 2x+1=0 \quad (2)$$

و بما أن $2 < a < 0$ فان جدول إشارة $2x+1 > 0$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	—	0	+

لنحدد إشارة $-x+2 < 0$

$$x = 2 \text{ يكافي } -x+2=0$$

و بما أن $-1 < a < 0$ فان جدول إشارة $-x+2 < 0$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	—	0	+

تمرين 4:

حل في \mathbb{R} المتراجحة التالية:

$$3x+6 \geq 0 \quad (1)$$

$$x = -2 \text{ يكافي } 3x+6=0$$

و بما أن $0 \geq 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	—	0	+

و منه فان: $S = [-2; +\infty[$

تمرين 5: حل في مجموعة الأعداد الحقيقة المتراجحات التالية:

$$5x-15 \leq 0 \quad (2) \quad -2x+12 > 0 \quad (1)$$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (4) \quad 4x^2 - 9 \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0 \quad (6) \quad \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \quad (5)$$

$$-2x+12 > 0 \quad (1) \quad -2x+12 = 0 \text{ يكافي } x=6$$

$$x = 6 \text{ يكافي } -2x+12 = 0$$

و بما أن $-2 < a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	+	0	—

و منه فان: $S =]-\infty; 6[$

$$5x-15 \leq 0 \quad (2)$$

$$x = 3 \text{ يكافي } 5x-15 = 0$$

و بما أن $5 < a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	—	0	+

و منه فان: $S =]-\infty; 3[$

$$4x^2 - 9 \geq 0 \quad (3)$$

$$(2x-3)(2x+3) = 0 \quad (2x)^2 - 3^2 = 0 \text{ يعني } 4x^2 - 9 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ أو } x = -\frac{3}{2} \text{ يعني } 2x-3=0 \text{ أو } 2x+3=0 \text{ يعني } x = \frac{3}{2} \text{ أو } x = -\frac{3}{2}$$

$c=1$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $a=2$ $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ (2)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$
بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلًا وجيده هو:
 $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ ومنه: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $c = 2$ و $b = 1$ و $a = 3$ $3x^2 + x + 2 = 0$ (3)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$
بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه:
 $S = \emptyset$
 $c = 3$ و $b = -8$ و $a = 4$ $4x^2 - 8x + 3 = 0$ (4)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 84 - 8 = 16 = (4)^2 > 0$
بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:
 $x_2 = \frac{-(8) - \sqrt{16}}{2 \times 4}$ و $x_1 = \frac{-(8) + \sqrt{16}}{2 \times 4}$
 $S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ ومنه: $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و $x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
 $c = 2$ و $b = -4$ و $a = 1$ $x^2 - 4x + 2 = 0$ (5)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$
بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:
 $x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2}$ و $x_2 = \frac{-(4)-\sqrt{8}}{2 \times 1}$ و منه: $x_1 = \frac{-(4)+\sqrt{8}}{2 \times 1}$
 $S = \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$ ومنه: $x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$
 $c = 7$ و $b = 5$ و $a = 1$ $x^2 + 5x + 7 = 0$ (6)
 $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$
 $S = \emptyset$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه:
 $c = 6$ و $b = -4$ و $a = 2$ $2x^2 - 4x + 6 = 0$ (7)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$
بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه:
 $c = -21$ و $b = -4$ و $a = 1$ $x^2 - 4x - 21 = 0$ (8)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$
بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:
 $x_2 = \frac{-(4) - \sqrt{100}}{2 \times 1}$ و $x_1 = \frac{-(4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$
 $S = \{-3, 7\}$ ومنه: $x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ و $x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7$
 $c = 3$ و $b = -6$ و $a = 3$ $3x^2 - 6x + 3 = 0$ (9)
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$
بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلًا وجيده مزدوجا هو:
 $S = \{1\}$ يعني $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$ ومنه:
تمرين 11: نعتبر المعادلة $(E) 20015x^2 - 2016x + 1 = 0$ ثم حدد الحل الثاني.
الأجوبة: نعرض x ب 1 في المعادلة (E) فنجد:
 $(E) 2015x^2 - 2016x + 1 = 0$ و منه 1 حل لـ $2015x^2 - 2016x + 1 = 2016 - 2016 = 0$
حسب الخاصية السابقة لدينا: $x_1 = 1$ و لدينا $x_1 \times x_2 = \frac{1}{2015}$

تمرين 6:

- هل العدد 1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$ (1)
- هل العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ (2)

الأجوبة: (1) العدد 1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$ لأن: $3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$ (2) العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ لأن: $(\sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$

تمرين 7: حدد الشكل القانوني للحدودية: $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$ (2)

الجواب: لدينا $P(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$ وبالتالي $2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$ هو الشكل القانوني لثلاثية الحدود $2x^2 + 5x + 2$.

تمرين 8: حدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2 + 6x + 15$ (2)

الجواب: لدينا $2x^2 + 6x + 15 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{-21}{4}$ $= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$

تمرين 9: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

- $3x^2 + x + 2 = 0$ (1)
- $x^2 - 10x + 25 = 0$ (2)
- $x^2 - 3x + 2 = 0$ (3)

الأجوبة: (1) المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حل في \mathbb{R} لأن $\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23 < 0$ (2) المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد لأن $\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$.

حل هذه المعادلة هو: $x = \frac{b}{2a} = \frac{-1}{2}$ وبالتالي مجموعة حلولها هي $\{5\}$.

(3) نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $x^2 - 3x + 2 = 0$ بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما: $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$ و $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$.

تمرين 10: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

- $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ (2)
- $6x^2 - 7x - 5 = 0$ (1)
- $4x^2 - 8x + 3 = 0$ (4)
- $3x^2 + x + 2 = 0$ (3)
- $x^2 + 5x + 7 = 0$ (6)
- $x^2 - 4x + 2 = 0$ (5)
- $x^2 - 4x - 21 = 0$ (8)
- $2x^2 - 4x + 6 = 0$ (7)
- $3x^2 - 6x + 3 = 0$ (9)

الأجوبة: (1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ و $x = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{5}{3}$

(2) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ و $x = \frac{8+16}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{3}{2}$

(3) $3x^2 + x + 2 = 0$ و $x = \frac{-1-7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = -\frac{4}{3}$

(4) $x^2 + 5x + 7 = 0$ و $x = \frac{-5-13}{10} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = -\frac{9}{5}$

(5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ و $x = \frac{4-6}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = -\frac{1}{2}$

(6) $x^2 - 4x - 21 = 0$ و $x = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{11}{2}$

(7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ و $x = \frac{4+10}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{7}{2}$

(8) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ و $x = \frac{6+7}{6} = \frac{13}{6}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{13}{6}$

(9) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ و $x = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ يعني $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و منه: $x_1 = \frac{5}{3}$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = (1)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدوية لها جذرين هما:

$$x_2 = 1 \quad x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$\text{ومنه التعميل: } x^2 - 3x - 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 1)(x - 2) \quad \text{لدينا: } 3x^2 + x + 2 \quad (3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

ومنه فان هذه الحدوية لا يمكن تعميلها

تمرين 15: عمل ثلاثة الحدود التالية :

$$3x^2 - 6x + 3 \quad (3) \quad 4x^2 - 8x + 3 \quad (2) \quad 2x^2 - 4x + 6 \quad (1)$$

$$c = 6 \quad b = -4 \quad a = 2 : 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha \text{ و} \quad \beta$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 16 - 48 = 32 < 0$$

ومنه فان هذه الحدوية لا يمكن تعميلها

$$c = 3 \quad b = -8 \quad a = 4 \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدوية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (4x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{ومنه التعميل: } 3x^2 - 6x + 3 \quad \text{بما أن } \Delta = 0 \quad \text{فان هذه الحدوية لها جذر}$$

$$x_1 = \frac{-(-8)}{2 \times 4} = 1$$

$$\text{ومنه التعميل: } 3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x - 1)^2$$

تمرين 16:

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad 1. \quad \text{أدرس إشارة الحدوية}$$

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \quad 2. \quad \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة:}$$

$$a = 2 \quad P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدوية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه:} \quad x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0

$$2 \quad \text{حل المتراجحة: } S = \left[-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty]$$

تمرين 17:

$$P(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad 1. \quad \text{أدرس إشارة الحدوية}$$

$$-2x^2 + 4x - 2 > 0 \quad 2. \quad \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة:}$$

$$a = -2 \quad P(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

$$\text{بما أن } \Delta = 0 \quad \text{فان هذه الحدوية لها جذر وحيد هو: } x_1 = \frac{-4}{2 \times (-2)} = 1$$

$$\text{اذن: } x_2 = \frac{1}{2015} \quad \text{يعني } 1 \times x_2 = \frac{1}{2015}$$

تمرين 12: تعتبر المعادلة: $-2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حللين مختلفين α و β بدون حسابهما

$$2. \text{ استنتج قيم ما يلي: } \alpha + \beta \text{ و } \alpha \times \beta \text{ و } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \text{ و } \alpha^3 + \beta^3 \text{ و } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{الاجوبة: } (1) \quad \text{اذن: } a = -2 \text{ و } b = \sqrt{2} \quad -2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$$

$$c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 2 + 16 = 18 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حللين α و β

$$(2) \quad \text{حسب خاصية لدينا: } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} \text{ و } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{و} \quad \alpha + \beta = -\frac{\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{يعني } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad \text{يعني } \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(-1)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \quad \text{اذن: } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha \beta}$$

$$\text{ونعلم أن: } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$(3) \quad \text{اذن: } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = \frac{\sqrt{2}^3}{2^3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{8} = \frac{14\sqrt{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

تمرين 13: عمل ثلاثة الحدود التالية ان أمكن :

$$R(x) = 6x^2 - x - 1$$

الجواب: مميز الحدوية $R(x)$ هو

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \quad \text{اذن جذرا الحدوية: } x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \quad x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$$

$$R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

تمرين 14: عمل ثلاثة الحدود التالية :

$$3x^2 + x + 2 \quad (3) \quad x^2 - 3x + 2 \quad (2) \quad x^2 - 10x + 25 \quad (1)$$

$$\text{أجوبة: } (1) \quad c = 25 \quad b = -10 \quad a = 1 : x^2 - 10x + 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدوية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$$

$$c = 2 \quad \text{و} \quad b = -3 \quad \text{و} \quad a = 1 \quad x^2 - 3x + 2 \quad (2)$$

اذن : $y = -\frac{4}{3}$ يعني : $2 \times 3 + 3 \times y = 2$ اذن : $x = 3$

اذن : $y = -2$ يعني : $2 \times 4 + 3 \times y = 2$ اذن : $x = 4$

$y = \frac{-2x+2}{3}$ يعني $3y = -2x+2$ يعني $2x+3y = 2$ (3)

$S = \left\{ \left(x; \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$ يعني $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

تمرين 21: حل في \mathbb{R}^2 المعادلات التالية :

$-3x+12y-2=0$ (2) $2x-8y+10=0$ (1)

$7x-14y+1=0$ (3)

أجوبة 1: $y = 8x-10$ يعني $2x-8y+10=0$ (1)

يعني $S = \{(x; 4x-5) / x \in \mathbb{R}\}$ اذن : $y = 4x-5$

$y = \frac{3x+2}{12}$ يعني $12y = 3x+2$ يعني $-3x+12y-2=0$ (2)

$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$ يعني $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$

$x = \frac{14y-1}{7}$ يعني $7x = 14y-1$ يعني $7x-14y+1=0$ (3)

$S = \left\{ \left(2y - \frac{1}{7}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$ اذن : $x = 2y - \frac{1}{7}$

تمرين 22: حل في \mathbb{R}^2 المعادلات التالية :

2) $x+5=y+5$ 1) $2x-y+1=2y-2x+5$

3) $3x+2y-2=2y-2$ 4) $x+y=2x-1$

أجوبة 2: $2x-y+1=2y-2x+5$ (1) يعني $2x-y+1=2y-2x+5$

$4x=3y+4$ يعني $4x-3y-4=0$

$S = \left\{ \left(\frac{3}{4}y+1; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$ يعني $x = \frac{3}{4}y+1$ ومنه

$y = x$ يعني $x+5=y+5$ (2)

$S = \{(x; x) / x \in \mathbb{R}\}$ ومنه

$x=0$ يعني $3x+2y-2=2y-2$ 3) $3x=0$

$S = \{(0; y) / y \in \mathbb{R}\}$ ومنه

$-x+y+1=0$ يعني $x+y=2x-1$ (4)

$S = \{(x; x-1) / x \in \mathbb{R}\}$ يعني $y = x-1$ ومنه

تمرين 23: نعتبر الحدوية $P(x)$ بحيث :

$P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1. بين أن -1 هو جذر للحدوية $P(x)$

2. بين أن $(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2})$

نضع : $Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$

3. Δ هو مميز ثلاثة الحدود $(Q(x))$ تأكيد أن $\Delta = (\sqrt{2}-1)^2$

4. حل في \mathbb{R} المعادلة $Q(x) = 0$

5. استنتج حلول المعادلة : $x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

6. حل في \mathbb{R} المعادلة $P(x) = 0$

7. حل في \mathbb{R} المتراجحة : $P(x) \leq 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

حل المتراجحة : (2)

تمرين 18:

(1) أدرس إشارة الحدوية

(2) حل في \mathbb{R} المتراجحة :

$a = 3 > 0$ $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

ومنه: $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	

حل المتراجحة : (2)

تمرين 19:

حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية :

(3) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ (2) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ (1)

$x^2 - 3x - 10 < 0$

$a = 3 > 0$ $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ (1):

ومنه: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	

ومنه: $S = \mathbb{R}$

$a = 4$ $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ (2)

ومنه: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

بما أن 0 جذر للحدوية فان جذريهما :

$x_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$ و $x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 8x + 3$	+	0	-	0 +

$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

$a = 4$ $x^2 - 3x - 10 < 0$ (3)

ومنه: $\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$

بما أن 0 جذر للحدوية فان جذريهما :

$x_2 = -2$ و $x_1 = 5$ ومنه:

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$4x^2 - 8x + 3$	+	0	-	0 +

$S =]-2, 5[$

تمرين 20: نعتبر في المجموعة \mathbb{R}^2 المعادلة :

(1) تأكيد أن الزوج $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة:

(2) اعط ثلاثة أزواج حلول للمعادلة:

(3) حل في \mathbb{R}^2 للمعادلة :

أجوبة 1: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة اذن : $2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3} = 2$

$\left(2, -\frac{2}{3}\right) \in S$ اذن : $y = -\frac{2}{3}$ يعني : $2 \times 2 + 3 \times y = 2$ (2)

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\begin{aligned}
 14+4\sqrt{6} &= 14+2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 (2) \\
 14+4\sqrt{6} &= (2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \\
 P(x) &= x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \quad (3) \\
 \text{بما أن } \Delta &= 14+4\sqrt{6} > 0 \text{ فان للمعادلة حلين هما:} \\
 x_1 &= \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2 \times 1} \\
 x_1 &= \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\
 S &= \{\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \quad (4)
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0

$$\begin{aligned}
 S &=]-\infty, -2\sqrt{3}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[\\
 x + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} &= 0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

يمكن كتابتها على الشكل : $\sqrt{x}^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$: نضع $X = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$$X^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})X - 2\sqrt{6} = 0$$

حسب السؤال السابق : $X_2 = -2\sqrt{3}$ أو $X_1 = \sqrt{2}$ يعني $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$ أو $\sqrt{x_1} = \sqrt{2}$

نلاحظ أن المعادلة : $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$ ليس لها حل لأن الجذر دائماً موجب

ومنه $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2$ يعني $x_1 = 2$ ومنه $S = \{2\}$

تمرين 25: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$$

باستعمال طريقة التعويض

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلاً

$$y = 10 - 4x \quad \text{يعني } 4x + y = 10$$

ونعرض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \quad \text{يعني } -5x + 2y = -19$$

$$x = 3 \quad \text{يعني } 20 - 5x - 8x = -19 - 20 \quad \text{يعني } -13x = -39 \quad \text{يعني } 3$$

ونعرض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

تمرين 26: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$$

باستعمال طريقة التأليفة الخطية

الجواب: الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل

على :

$$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \quad \text{وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$x = 3 \quad \text{يعني } -8x - 2y - 5x + 2y = -20 - 19 \quad \text{يعني } -13x = -39 \quad \text{يعني } 3$$

ونعرض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

تمرين 27: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \quad \text{باستعمال طريقة المحدد}$$

أجوبة 1: $P(-1) = (-1)^3 - \sqrt{2}(-1)^2 - (-1) + \sqrt{2}$

$$P(-1) = -1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$$

اذن 1 - هو جذر للحدودية

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) = x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x - x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2} \quad (3)$$

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times 1 + (1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \quad (4)$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, 1\} \quad \text{ومنه: } x_1 = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0 \quad (5)$$

يمكن كتابتها على الشكل : $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

نضع $x = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$$X_2 = 1 \quad \text{حسب السؤال السابق: } X_1 = \sqrt{2} \quad (6)$$

$$\sqrt{x_2} = 1 \quad \text{أو } \sqrt{x_1} = \sqrt{2}$$

$$(\sqrt{x_2})^2 = (1)^2 \quad \text{أو } (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$S = \{2, 1\} \quad x_2 = 1 \quad \text{أو } x_1 = 2$$

$$x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{يعني } x+1=0 \quad (6)$$

$$S = \{-1, 1, \sqrt{2}\} \quad \text{ومنه: } x_1 = \sqrt{2} \quad \text{يعني } x = -1$$

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) \leq 0 \quad \text{يعني } P(x) \leq 0 \quad (7)$$

x	$-\infty$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$	+	+	0	-	0
$x+1$	-	0	+		+
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$S =]-\infty, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

تمرين 24: نعتبر المعادلة : $x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6} = 0$

1. نضع Δ هو مميز ثلاثة الحدود $P(x)$ تأكيد أن

$$\Delta = 14+4\sqrt{6}$$

$$14+4\sqrt{6} = (\dots + \dots)^2$$

$$P(x) = 0 \quad \text{المعادلة}$$

$$3. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعا}$$

$$4. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة: } P(x) > 0$$

$$5. \text{ استنتاج حلول المعادلة: } x + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6} \quad \text{أجوبة 1: } (1)$$

$$14+4\sqrt{6} = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$x = \frac{15}{2} \text{ يعني } 2x = 15 \text{ يعني } x + y + x - y = 11 + 4$$

ونعوض x ب $\frac{15}{2}$ في المعادلة $x + y = 11$ فنجد

$$\frac{15}{2} + y = 11$$

$$S = \left\{ \left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\} \text{ أي } y = \frac{7}{2} \text{ و منه:}$$

تمرين 29: 1) حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases} \quad (2) \text{ استنتج حلول النظمة التالية :}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0 \quad (1) \text{ محددة النظمة هي:}$$

و منه النظمة تقبل حلاً وحيداً:

$$S = \left\{ \left(-\frac{14}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\} \text{ و منه: } y = \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = \frac{14}{23} \text{ هو}$$

(2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا: $y \neq 0$ و $x \neq 0$

$$Y = \frac{1}{y} \text{ و } X = \frac{1}{x} \quad \text{نضع:} \quad \begin{cases} -7\frac{1}{x} - 3\frac{1}{y} = 4 \\ 4\frac{1}{x} + 5\frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases} \quad y \neq 0 \text{ فنحصل على النظمة التالية: } x \neq 0$$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة:

$$y = -\frac{23}{2} \text{ و } x = -\frac{23}{14} \quad \text{يعني: } \frac{1}{y} = -\frac{2}{23} \text{ و } \frac{1}{x} = -\frac{14}{23}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{23}{14}, -\frac{23}{2} \right) \right\} \quad \text{وبالتالي:}$$

تمرين 30: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} \frac{5}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{y-2} \text{ و } X = \frac{1}{x-1} \quad \text{نضع:} \quad y \neq 1 \text{ و } x \neq 1$$

$$\begin{cases} 5X + 3Y = 4 \\ -2X + Y = 1 \end{cases} \quad \text{فنحصل على النظمة التالية:}$$

$$Y = \frac{13}{11} \text{ و } X = \frac{1}{11} \quad \text{ونقوم بحل هذه النظمة ونجد:}$$

$$\frac{1}{y-2} = \frac{13}{11} \text{ و } \frac{1}{x-1} = \frac{1}{11} \quad \text{و منه:}$$

$$y = \frac{37}{13} \text{ و } x = 12 \quad \text{يعني: } y-2 = \frac{11}{13} \text{ و } x-1 = 11$$

$$S = \left\{ \left(12, \frac{37}{13} \right) \right\} \quad \text{وبالتالي:}$$

الجواب: طريقة المحددة:

$$\text{محددة النظمة (1) هي: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \text{ و منه النظمة تقبل حلاً وحيداً:}$$

$$S = \left\{ (2,1) \right\} \text{ و منه: } y = \frac{1}{2} \text{ و } x = \frac{4}{2} = 2 \text{ هو}$$

تمرين 28: باستعمال طريقة مناسبة

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1) \text{ محددة النظمة هي:}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x - 2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow$$

و منه النظمة (S) لها عدد لا متناه من الحلولاذن :

$$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2) \quad \text{بضرب المعادلة الثانية في 3}$$

$$S = \emptyset \quad \text{وهذا غير ممكن و منه:}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

محددة النظمة هي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Delta = (5-3) - (2-1) = 1 \neq 0 \quad \text{اذن} \quad \Delta = \begin{vmatrix} (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 & ((\sqrt{2})^2 - (1)^2 \\ (\sqrt{2})^2 - (1)^2 & (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 \end{vmatrix}$$

و منه النظمة تقبل حلاً وحيداً:

$$x = \frac{0 \quad \sqrt{2} - 1}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{1} = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} \quad 0}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{1} = -\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$S = \left\{ (1 - \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{5}) \right\} \quad \text{و منه:}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (x+y)(x-y) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ 11(x-y) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

الجواب: نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $0 = 2x - y - 2$

إذا كانت $x = 0$ فإن $y = -2$ أي $2 \times 0 - y - 2 = 0$

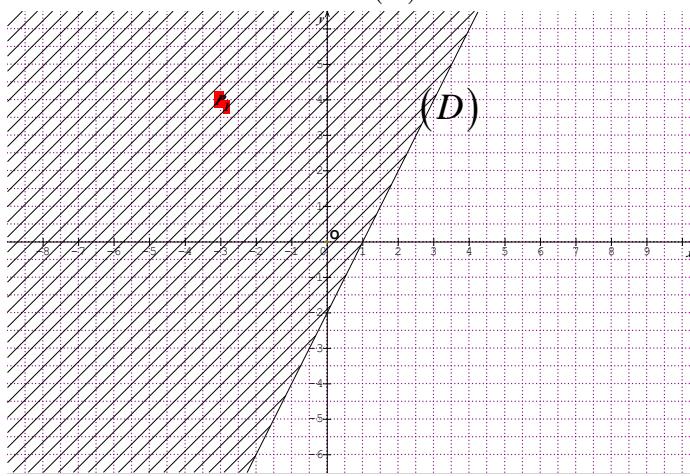
إذا كانت $x = 1$ فإن $y = 0$ أي $2 \times 1 - y - 2 = 0$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0; -2)$ و $B(1; 0)$

بالنسبة للنقطة $O(0; 0)$ $0 - 0 - 2 < 0$ يتحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة مجموعة أزواج النقط التي تنتهي إلى نصف

المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي يضم النقطة $O(0; 0)$



تمرين 35: حل مبانيًا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$x - y - 3 \geq 0$$

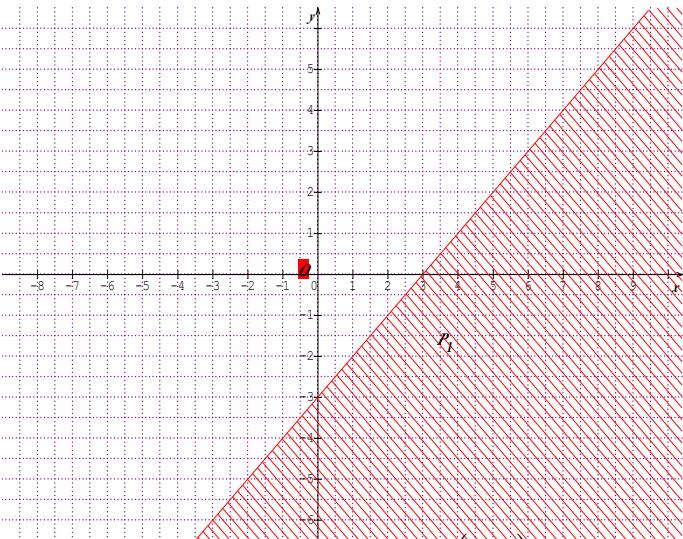
الجواب:

نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $0 = x - y - 3$

إذا كانت $x = 0$ فإن $y = -3$ أي $0 - y - 3 = 0$

إذا كانت $x = 1$ فإن $y = 0$ أي $1 - y - 3 = 0$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0; -3)$ و $B(1; 0)$



بالنسبة للنقطة $O(0; 0)$ $0 - 0 - 3 \geq 0$ لا تتحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتهي إلى

نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة $O(0; 0)$

تمرين 31: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ -3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 17 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $Y = \sqrt{y}$ و $X = \sqrt{x}$

$$\begin{cases} 2X + Y = 6 \\ -3X + 5Y = 17 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X = 1$ و $Y = 4$

$$(\sqrt{y})^2 = 4^2 \text{ يعني: } (\sqrt{x})^2 = (1)^2 \text{ يعني: } \sqrt{y} = 4 \text{ و } \sqrt{x} = 1$$

$$S = \{(1, 16)\} \text{ و بالتالي: } y = 16 \text{ و } x = 1$$

تمرين 32: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $Y = y^2$ و $X = x^2$

$$\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X = 3$ و $Y = 1$

$$y^2 = 1 \text{ و } x^2 = 3$$

$$y = -1 \text{ او } y = 1 \text{ و } x = -\sqrt{3} \text{ او } x = \sqrt{3}$$

$$y = -1 \text{ او } y = 1 \text{ و } x = -\sqrt{3} \text{ او } x = \sqrt{3}$$

$$S = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)\}$$

تمرين 33: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} (x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 5x + 4) = -3 \\ 2(x^2 - 3x + 1) - 3(y^2 - 5x + 4) = 4 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X = x^2 - 3x + 1$ و $Y = y^2 - 5x + 4$

$$\begin{cases} X + Y = -3 \\ 2X - 3Y = 4 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X = -2$ و $Y = -2$

$$y^2 - 5x + 4 = -2 \text{ و } x^2 - 3x + 1 = -1$$

$$y^2 - 5x + 6 = 0 \text{ و } x^2 - 3x + 2 = 0$$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز فنجد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

نحل المعادلة: $y^2 - 5x + 6 = 0$ باستعمال المميز فنجد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$$

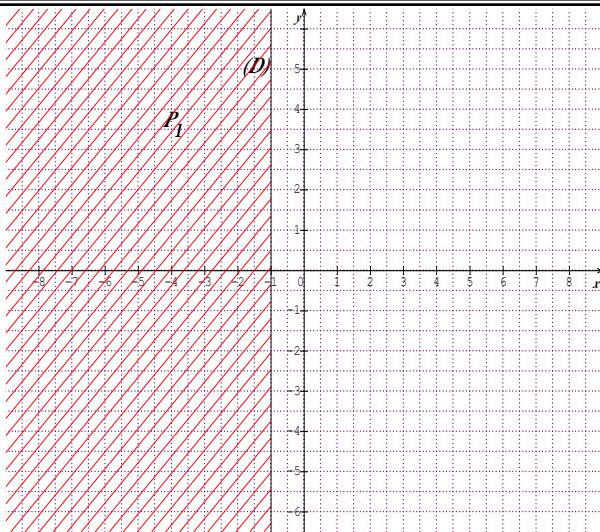
بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$y_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \text{ و } y_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

$$S = \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 2)\}$$

تمرين 34: حل مبانيًا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$2x - y - 2 < 0$$



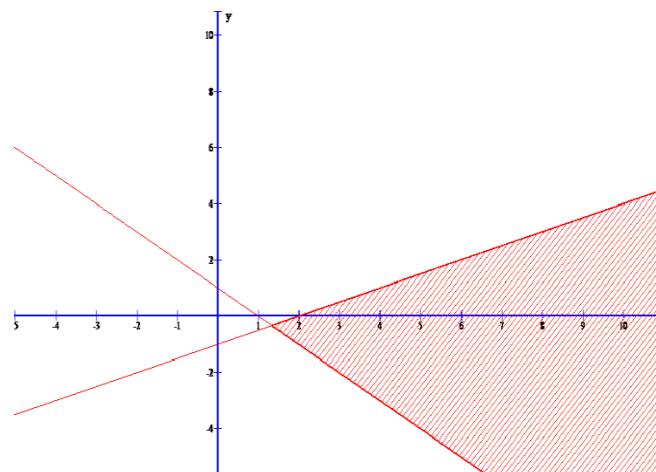
تمرين 36: حل مبيانا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$(S_1) \begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ -x + 2y + 2 < 0 \end{cases}$$

الجواب: نرسم أولاً المستقيمات التالية :

$$x + y - 1 = 0; -x + 2y + 2 = 0$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبيان:



تمرين 38: حل مبيانا النظمة التالية:

$$(S) \begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ -x + y + 5 < 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

الجواب: نرسم أولاً المستقيمات التالية :

$$2x + y - 3 = 0; -x + y + 5 = 0; x = 4$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبيان:

تمرين 36: حل مبيانا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$2x - y < 0$$

الجواب:

نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $2x - y = 0$

$$\text{اذا كانت } x = 0 \text{ فان } y = 0$$

$$\text{اذا كانت } x = 1 \text{ فان } y = 2$$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(1;2)$ و $O(0;0)$

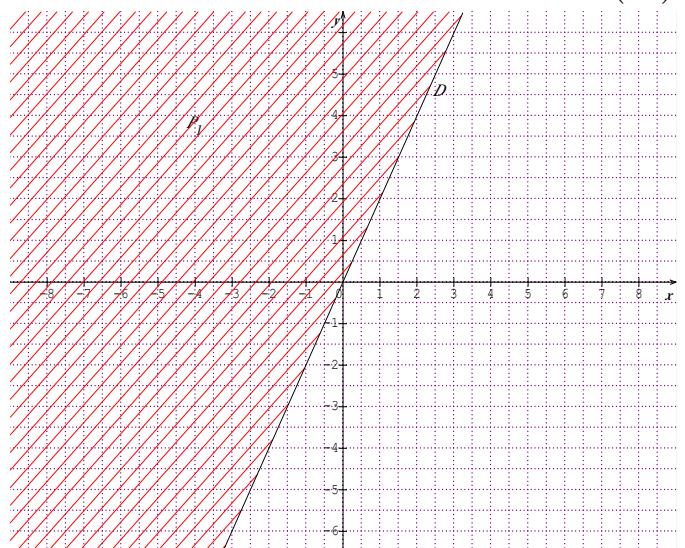
نأخذ نقطة أخرى عشوائياً مثل $B(1;1)$

لدينا $2 \times 1 - 1 < 0$ يعني $1 < 0$ ومنه احداثيات $(1;1)$ لا تتحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تتنمي إلى

نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة

$$B(1;1)$$



تمرين 37: حل مبيانا في \mathbb{R}^2 المتراجحة التالية:

$$3x + 2y < 2x + 2y - 1$$

الجواب: $3x + 2y < 2x + 2y - 1$ يعني $3x + 2y - 2x - 2y + 1 < 0$

$$x + 1 < 0$$

نرسم أولاً المستقيم (D) الذي معادلته $x + 1 = 0$

$$x = -1$$

نأخذ نقطة أخرى عشوائياً مثل $O(0;0)$

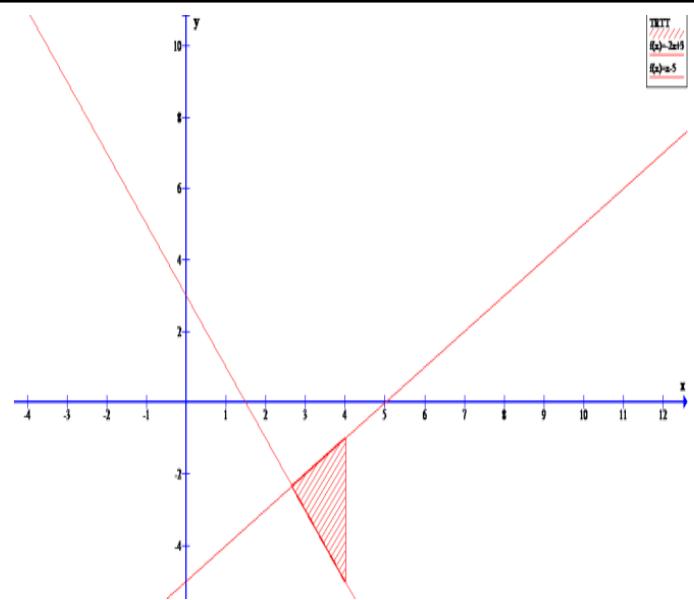
لدينا $0 + 1 < 0$ يعني $1 < 0$ ومنه احداثيات $(0;0)$ لا تتحقق

المتراجحة

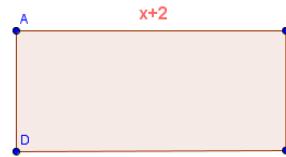
ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تتنمي إلى

نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة

$$O(0;0)$$



تمرين 40 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب 2cm وأن مساحته تساوي 15cm^2 **الجواب:**



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :
 $b=2, c=-15$ و $a=1$: $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$

بما أن $0 > \Delta$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2 \times 1} = -5 < 0 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + 8}{2 \times 1} = 3$$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :
 $x = 3$ **نأخذ**

والتالي طوله هو :

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
 c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

