الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس المعادلات و المتراجحات و النظمات	مستوى الدراسي: TCS - TCT

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

مثال1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):-2x+22=0$ (يجب التأكيد على كتابة مجموعة الحلول)

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):3(2x+5)=6x-1$

مثال3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):4(x-2)=6x-2(x+4)$

II. معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

معادلات من النوع : $(ax+b)(cx+d)=0$

مثال1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):(2x-1)(3+x)=0$

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E)\dfrac{3x-2}{x+1}=0$

مثال3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $|x-2|=0$, $|3x+1|=4$, $|2x-5|=-1$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\succ 0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\prec 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax+b$:
حسب إشارة العدد a , لدينا الجدولان الآتيان:

إذا كان $a\succ 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

إذا كان $a\prec 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

نلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $2x+1\geq 0$ و $-3x+6\geq 0$ و $2x+8\leq 0$ و $-2x+16>0$

مثال 3: أعط جدول إشارة التعابير التالية: $p(x)=(1-x)(2x+3)$ و $q(x)=\dfrac{5x-2}{1+3x}$ و $R(x)=(x+1)^2(x+2)(-x+3)$

الطريقة: في جدول تعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

IV. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$ لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

لأن: $(\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ و يسمى جذر للحدودية ax^2+bx+c.

الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

الكتابة $a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

مثال : نعتبر الحدودية $P(x)=2x^2+5x+2$.

حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة $(E):3x^2-5x+7=0$ لنحسب مميز المعادلة (E)

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

مثال 1 : الشكل القانوني لثلاثية الحدود: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود : $2x^2+6x+15$

مثال2: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2+5x$

تحديد مجموعة حلول معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

نعتبر المعادلة: $(E)\ ax^2+bx+c=0$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ و بما أن: $\Delta=b^2-4ac$ و $4a^2=(2a)^2$

فان: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

- إذا كان $\Delta\prec 0$ فان: $-\frac{\Delta}{(2a)^2}\succ 0$ و بالتالي المعادلة (E) ليس لها حل في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة (E) تكتب $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

و بما أن $\Delta\prec 0$ فان حل المعادلة (E) هو $x=-\frac{b}{2a}$.

- إذا كان $\Delta\succ 0$ فان المعادلة (E) تكتب $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$ أي $\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

و بالتالي المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

في حالة $\Delta=0$ نقول إن المعادلة (E) تقبل حلا مزدوجا.

خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

- ✓ إذا كان $\Delta\prec 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.
- ✓ إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$
- ✓ إذا كان $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان المتساويتين $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

V. تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

.

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta \succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2.
و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
3. إذا كان: $\Delta\prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x)=6x^2-x-1$

إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a.
2. إذا كان $\Delta=0$: فان إشارة $P(x)$ هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R}$ يخالف $-\frac{b}{2a}$ و $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.
3. إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود $P(x)$ فان: $P(x)$ لها إشارة العدد a خارج الجذرين x_1 و x_2 لها عكس إشارة العدد a داخل الجذرين و $P(x_1)=P(x_2)=0$.

مثال: لنحدد إشارة الحدودية $P(x)=6x^2-x-1$

ملحوظة: لحل متراجحة من الدرجة الثانية بمجهول واحد نعتمد على دراسة إشارة ثلاثية الحدود المرتبطة بها.

نتيجة :

- إذا كان $\Delta\prec 0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

و بما أن: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\succ 0$ فان إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c هي إشارة a.

- إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$. و بالتالي إذا كان $x\neq -\frac{b}{2a}$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a.

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
a	إشارة a	إشارة a	إشارة a
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	$-$	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	إشارة a	إشارة $(-a)$	إشارة a

- ا كان $\Delta\succ 0$ فان: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 هما حلي المعادلة ax^2+bx+c

لنضع جدول إشارة الجداء: نفترض أن $x_1\prec x_2$.

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	إشارة $(-a)$	إشارة a

VI. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1. تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$
2. اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$
3. حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

تعريف و خاصية: كل معادلة على شكل $(1)\ ax+by=c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

يكون الزوج (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) إذا و فقط إذا كان $ax_0+by_0=c$.

حل المعادلة (1) يعني تحديد جميع الأزواج $(\alpha;\beta)$ التي تحقق $a\alpha+b\beta=c$.

إذا كان $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ فان المعادلة $ax+by=c$ تقبل ما لا نهاية من الحلول.

مثال: الزوج $(3,2)$ حل للمعادلة: $3x-y=7$ لأن $3\times 3-2=7$ و كذلك الزوج $(2,-1)$.

VII. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

اعتمادا على النشاط رقم 9 لدينا التعريف و الخاصية الآتيتان:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$

إذا كان $D=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.

إذا كان $D\neq 0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{cb'-bc'}{D}=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{D} \text{ و } x=\frac{ac'-ac'}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{D}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\ -x+4y=2\end{cases}$