

**ملخص وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم
من انجاز : الأستاذ نجيب عثمانى أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تاهيلي**

ملخص درس الحدوديات

اذن $P(x) = (x-1)(2x+1)$ ونقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

(2) قابلية القسمة على $x - \alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$

بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

(1) بين أن -3 جذر للحدودية $P(x)$

(2) حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (x+3)Q(x)$

الجواب (1): -3 جذر للحدودية: لأن $P(-3) = 0$

(2) إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$ ، ومنه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$P(x) = (x+3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3 و $R(x) = x+3$ درجتها 1

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

تحديد $Q(x)$: الطريقة 1: لدينا: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$

يعني أن: $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = (x+3)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$

$= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a = 1$ و $b + 3a = 3$ و

$c + 3b = -2$ و $3c = -6$

يعني أن: $a = 1$ و $b = 0$ و $c = -2$ إذن: $Q(x) = x^2 - 2$.

الطريقة 2: القسمة الاقليدية: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = (x+3)(x^2 - 2)$

و منه $Q(x) = x^2 - 2$

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

$x^3 + 3x^2 - 2x - 6$	$x + 3$
$-x^3 - 3x^2$	$x^2 - 2$
$-2x - 6$	
$2x + 6$	
0	

ملاحظة: القسمة الاقليدية تمكننا من تعميل حدودية

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = (x+3)(x^2 - 2)$

I. تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

(1) أمثلة و تعاريف: مثال 1: التعبير $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$

يسمى حدودية و $\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 3.

$-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 2.

x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$ ، العدد 3 يسمى درجة الحدودية و نكتب $d^0 P = 3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2 + 2\sqrt{x} + 5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.

مثال 4: الحدودية: $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ درجتها 4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4. 1 هو معامل الحد من الدرجة 3، 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1، $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$

نعتبر الحدودية: $P(x) = 4x^2 - x^3 + x^4 + 3 + x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$ على شكل:

$P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 3$

نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدة.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة هي حدودية جميع معاملاتها تساوي صفرا.

أي $P(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$. والحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

(2) تساوي حدوديتين: خاصية: تكون حدوديتان متساويتين إذا و فقط إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

II. جمع و ضرب حدوديتين:

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز

$P(x) + Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P+Q) \leq d^0 P + d^0 Q$ في حالة $P(x) + Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

خاصية 3: جذاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز

$P(x) \times Q(x)$ و لدينا: $d^0(P(x) \times Q(x)) = d^0 P(x) + d^0 Q(x)$

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x - \alpha$:

(1) جذر حدودية: تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha) = 0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = 2x^2 - x - 1$

بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$ و تأكد أن: $P(x) = (x-1)(2x+1)$

الجواب: 0 $P(1) = 2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0$ إذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

$(x-1)(2x+1) = 2x \times x + x - 2x - 1 = 2x^2 - x - 1 = P(x)$