

I - الحدوية: كتابة و مصطلحات - تساوى حدوديتين

1- أسلطة

نشاط

لتكن الأعداد x و $x+3$ و $x+5$ أبعاد متوازي المستطيلات و $V(x)$ حجمه

حدد $V(x)$

$$V(x) = x(x+3)(x+5) = x^3 + 8x^2 + 15x$$

التعبير $x^3 + 8x^2 + 15x$ يسمى **تعبيراً حدودياً أو حدودية**

x^3 هو الحد الذي له أكبر أس (هذا الأس هو 3) نقول إن **درجة الحدوية** $V(x)$ هو 3

نكتب $d^\circ(V(x)) = 3$

نشاط

حدد من بين النعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجتها

$$P(x) = \frac{1}{3}x^5 - 3x^3 + 4x - 1 ; \quad Q(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3 ; \quad H(x) = -6$$

$$T(x) = 3x^2 + 2|x| ; \quad G(x) = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} ; \quad K(x) = 2x^4 - 2\sqrt{x} + 2 ; \quad N(x) = 0$$

* كل تعبير على شكل ax^n حيث x متغير حقيقي و a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي يسمى حدية إذا كان $a \neq 0$ درجة الحدية ax^n هو n و درجة الحدية a هو 0.

الحدية المنعدمة لا درجة لها

* **الحدوية هي كل تعبير على شكل مجموع تكون جميع حدوده حديات**

* $P(x)$ حدوية تتكون من أربعة حدود هي: -1 و $4x$ و $-3x^3$ و $\frac{1}{3}x^5$

العدد 3 هو درجة الحد $-3x^3$ و -3 - معامل الحد

العدد 5 هو درجة الحد $\frac{1}{3}x^5$ و $\frac{1}{3}$ معامل الحد

درجة الحدوية $P(x)$ هو 5 نكتب $d^\circ(P(x)) = 5$

* $Q(x)$ حدوية تتكون من 3 حدود .

* $H(x)$ حدوية تتكون من حد واحد.

* كل تعبير من التوابير $T(x)$ و $G(x)$ و $K(x)$ ليس حدوية

* $N(x)$ حدوية منعدمة ليست لها درجة

الحدوية المنعدمة هي كل حدوية معاملاتها منعدمة.

نشاط

اختصر الحدوية

$$P(x) = -2x^5 + 3x^3 - 4x^4 + x^3 + x + x^2 - x^4$$

اختصار حدوية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجتها مختلفة مثنى مثنى

الشكل المختصر للحدوية $P(x)$ هو x الشكل المختصر للحدوية

نشاط

1- هل الحدويدتين P و Q متساويتان في كل الحالات

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\begin{array}{lll} Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3 & P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 & * \\ Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2 - 4x + 1 + & P(x) = (\sqrt{2}-1)x^2 - 4x + 1 & * \\ Q(x) = x^2 - 3x^3 + x & P(x) = -3x^3 + x^2 - x & * \\ P(x) = (a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (a-c+1)x & & 2- \text{لتكن} \\ & \text{حدد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ لكي تكون } P(x) \text{ حدودية منعدمة.} & \end{array}$$

2- تعاريف تعريف 1

لتكن $P(x)$ حدودية مختصرة و غير منعدمة. درجة $P(x)$ هي درجة الحد الذي له أكبر درجة

نرمز لها بالرمز $d^\circ(P(x))$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة

تعريف 2

تكون حدوديتان ، مختصرتان غير منعدمتين ، متساويتين إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات حدودها من نفس الدرجة متساوية مثنى مثنى

3- حالات خاصة

- *- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل $ax + b$ حيث $b \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}^*$
- *- الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثة الحدود و تكتب على شكل $ax^2 + bx + c$ حيث $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ $a \in \mathbb{R}^*$

II- مجموع و جداء أنشطة 1

$$\begin{array}{lll} d^\circ(P) + d^\circ(Q) \text{ مع مقارنة } P(x) - Q(x) \text{ و } P(x) + Q(x) & & \text{أ- أحسب } \\ Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3 & P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 & * \\ Q(x) = 4x^6 - 3x^3 - 4x^2 - 6 & P(x) = -4x^6 + 2x^3 - 6x^2 + 1 & * \\ d^\circ(P) \times d^\circ(Q) \text{ مع مقارنة } P(x) \times Q(x) \text{ و } d^\circ(P \times Q) & & \text{ب- أحسب } \\ Q(x) = 2x^2 - 6x - 3 & P(x) = -3x + 2 & * \\ Q(x) = x^3 - x^2 - 3 & P(x) = 3x^2 - 4x + 1 & * \end{array}$$

ج - عمل

$$Q(x) = (x+1)^3 - 27(x-1)^3 \quad P(x) = (x-3)^2 - (5x+6)^2$$

2- خصائص

$$\begin{array}{l} \text{*- مجموع حدوديتين } P \text{ و } Q \text{ هو حدودية يرمز لها بـ } P+Q \\ \qquad \qquad \qquad d^\circ(P+Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q)) \text{ ملاحظة} \\ \text{*- فرق حدوديتين } P \text{ و } Q \text{ هو حدودية يرمز لها بـ } P-Q \\ \qquad \qquad \qquad d^\circ(P-Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q)) \text{ ملاحظة} \\ \text{*- جداء حدوديتين } P \text{ و } Q \text{ هو حدودية يرمز لها بـ } P \times Q \\ \qquad \qquad \qquad d^\circ(P \times Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q) \text{ ملاحظة} \end{array}$$

III- حذر حدودية - القسمة على $x-a$

1) حذر حدودية

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية و α عدداً حقيقياً

نقول إن العدد α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان $P(\alpha) = 0$

أمثلة

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و -1 و 2 و -3. تلك التي تمثل جدراً لـ $(P(x))$

2) القسمة على $x-a$ أنشطة

أ- نعتبر $P(x) = x^3 + x + 1$

- أحسب $P(3)$

$$P(x) - P(3) = (x - 3)Q(x)$$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 - x - 2$$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) - P(1) = (x - 1)Q(x)$$

- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث

$$P(x) - P(2) = (x - 2)Q'(x)$$

- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث

أ- خاصية

لتكن $P(x)$ حدودية درجة n حيث $n \geq 1$ و α عدداً حقيقياً.

توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجة $n-1$ حيث

$x - \alpha$ خارج القسمة الأقلية للحدودية $P(x)$ على

$x - \alpha$ باقي القسمة الأقلية للحدودية $P(x)$ على α

ب- تقنية لحساب الخارج والباقي

لنحدد الخارج و باقي القسمة الأقلية لـ $(P(x))$ على $x - 3$

$$P(x) = -3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$$

حيث

$$\begin{array}{r}
 -3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1 \\
 3x^4 - 9x^3 \\
 \hline
 -7x^3 - x^2 \\
 7x^3 - 21x^2 \\
 \hline
 -22x^2 - 5x \\
 22x^2 - 66x \\
 \hline
 -71x + 1 \\
 71x - 213 \\
 \hline
 -212
 \end{array}$$

ملاحظة $P(3) = -212$

$$P(x) = -2x^5 - x^2 + 3x - 2 \quad *$$

حدد الخارج و باقي القسمة الأقلية لـ $(P(x))$ على $x - 2$

ج- قابلية القسمة على $x-a$ تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها $n \geq 1$ حيث n عددًا حقيقياً. نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n - 1$ حيث $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$. ملاحظة: $P(\alpha) = 0$

تمرين نعتبر $P(x) = x^3 - x - 6$

$$P(2) = 0 \quad \text{نلاحظ أن}$$

$$P(x) = (x - 2)Q(x) \quad \text{حيث } Q(x) \text{ حدد حدودية للحدودية } P(x).$$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها $n \geq 1$ حيث n عددًا حقيقياً. نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وفقط إذا كان α جدراً للحدودية $P(x)$.

تمرين نعتبر $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$

- بإنجاز القسمة الأقلية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x) = (x - 3)Q(x)$

- بين أن -1 جدراً للحدودية $Q(x)$. عمل $Q(x)$.

استنتج عملياً للحدودية $P(x)$.

تمرين 2 $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

- أحسب $P(-2)$ و $P(1)$ و $P(3)$

- أنجز القسمة الأقلية $L(P(x))$ على $x + 2$

- بين إذا كان α جدراً غير منعدم لـ $L(P(x))$ فان $\frac{1}{\alpha}$ جدر $P(x)$. استنتاج الجذور الثلاث.

تمرين 3 $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 11x - 6$

- حدد m حيث $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 2$

- نضع $m = 3$. أحسب $P(-3)$.

استنتاج عملياً للحدودية $P(x)$.