

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

كن $n \in \mathbb{N}$ قارن العددين

$$A = \frac{1}{(n+5)(n+1)} ; B = \frac{1}{(n+4)(n+2)}$$

الاجواب :

نقارن مقامي العددين A و B

$$\begin{aligned} & (n+5)(n+1) - (n+4)(n+2) \\ &= n^2 + 6n + 5 - n^2 - 6n - 2 \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+5)(n+1) > (n+4)(n+2) \\ & \frac{1}{(n+5)(n+1)} < \frac{1}{(n+4)(n+2)} \\ & A < B \end{aligned}$$

تمرين 2 :

كن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $-2 < b < -1$

$2 < a < 3$ اعط تأطير للأعداد التالية :

$$a+b \text{ و } 2a-b \text{ و } 2a^2+1 \text{ و } 4-b^2$$

الاجواب :

$$\begin{aligned} & 0 < a+b < 2 \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases} \\ & \begin{cases} 4 < 2a < 6 \\ 1 < -b < 2 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5 < 2a - b < 8 \quad \text{ومنه}$$

$$\text{لدينا } 2 < a < 3 \text{ ومنه } 4 < a^2 < 9$$

$$8 < 2a^2 < 18 \quad \text{إذن}$$

$$\boxed{9 < 2a^2 + 1 < 19} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{لدينا } -2 < b < -1 \quad \text{لدينا } 1 < -b < 2$$

$$1 < b^2 < 4 \quad \text{ومنه}$$

$$-4 < -b^2 < -1 \quad \text{إذن}$$

$$\boxed{0 < 4 - b^2 < 3} \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 3 :

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a \in [1, 2]$ و $b \in [-1, 3]$

1 - أطر الأعداد $3a$; $-5b$; a^2 ; b^2

2 - استنتج تأطير للعدد : $A = a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1$

3 - اعط تأطيرا للعدد ab

الاجواب :

$$1 \leq a \leq 2 \quad \text{إذن} \quad a \in [1, 2]$$

$$\boxed{3 \leq 3a \leq 6} \quad \text{ومنه}$$

$$\text{لدينا } a \in [-1, 3] \quad \text{إذن} \quad -1 \leq b \leq 3$$

$$\boxed{-15 \leq -5a \leq 5} \quad \text{ومنه}$$

$$\boxed{3 \leq 3a \leq 6} \quad \text{لدينا } 1 \leq a \leq 2 \quad \text{إذن}$$

$$\text{لدينا } -1 \leq b \leq 3$$

$$\text{يعني } 0 \leq b \leq 3 \text{ أو } -1 \leq b \leq 0$$

$$\text{يعني } 0 \leq b \leq 3 \text{ أو } 0 \leq -b \leq 1$$



$$\begin{cases} B = |4 - 2x| = 4 - 2x & ; x \leq 2 \\ B = |4 - 2x| = 4 - 2x & ; x \geq 2 \end{cases}$$

جدول إشارة كل من x و $x - 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x - 1	-	-	○	+
x	-	○	+	+

إذن في المجال $] -\infty, 0]$

$$\begin{aligned} C &= |x - 1| - 2|x| = -(x - 1) + 2x \\ &= -x + 1 + 2x = x + 1 \end{aligned}$$

في المجال $[0, 1]$

$$\begin{aligned} C &= |x - 1| - 2|x| \\ &= -(x - 1) + 2x = -x + 1 - 2x \\ &= -3x + 1 \end{aligned}$$

في المجال $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} C &= |x - 1| - 2|x| \\ &= x - 1 - 2x \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

خلاصة :

$$\begin{cases} C = x + 1 & ; x \leq 0 \\ C = -3x + 1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ C = -x - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

تمرين 5:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$|6 - x| = -1 \quad - (3 \quad ; \quad |2x - 1| = 5 \quad - (1$$

$$|\frac{x-2}{x+2}| = 1 \quad - (4 \quad ; \quad |2 + x| = 0 \quad - (2$$

$$0 \leq b^2 \leq 1 \text{ أو } 0 \leq b^2 \leq 9$$

$$0 \leq b^2 \leq 9$$

وبالتالي

$$\begin{cases} 1 \leq a^2 \leq 4 & \text{لدينا} \\ -9 \leq -b^2 \leq 0 \\ 3 \leq 3a \leq 6 \\ -15 \leq -5b \leq 5 \end{cases}$$

بجمع هذه المتفاوتات نحصل على :

$$1 - 9 + 3 - 15 \leq a^2 - b^2 + 3a - 5b \leq 4 + 0 + 6 + 5$$

$$-20 \leq A - 1 \leq 15 \quad \text{أي}$$

$$-19 \leq A \leq 16$$

ومنه

تمرين 4:

اكتب التعبيرات التالية بدون رمز القيمة المطلقة :

$$A = |2x - 3|$$

$$B = |4 - 2x|$$

$$C = |x - 1| - 2|x|$$

الجواب :

جدول إشارة $2x - 3$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
2x - 3	-	○	+

$$\begin{cases} A = |2x - 3| = 2x - 3 & ; x \geq \frac{3}{2} \\ A = |2x - 3| = -2x + 3 & ; x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

جدول إشارة $4 - 2x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
4 - 2x	+	○	-



الجواب :

$$(1) \quad |2x - 1| \leq 3 \text{ يعني } -3 \leq 2x - 1 \leq 3$$

$$\text{يعني } -2 \leq 2x \leq 4$$

$$\text{يعني } -1 \leq x \leq 2$$

$$S = [-1, 2] \text{ وبالتالي}$$

$$(2) \quad |4x - 5| < 0 \text{ غير ممكن إذن } S = \emptyset$$

$$(3) \quad |-x - 2| < -11 \text{ غير ممكن إذن } S = \emptyset$$

$$(4) \quad |4x + 5| > -3 \text{ هذا دائما صحيح كيفما}$$

$$S = \mathbb{R} \text{ كانت } x \text{ ومنه}$$

$$(5) \quad |x - 3| \geq 2 \text{ يعني } x - 3 \geq 2 \text{ أو } x - 3 \leq -2$$

$$\text{يعني } x \geq 5 \text{ أو } x \leq 1$$

$$\text{وبالتالي } S =]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$$

تمرين 7 :

$$1 - x = 2|x| \text{ : المعادلة } \mathbb{R} \text{ حل في}$$

$$-2 \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلتين :}$$

$$(a) \quad |x - 2| + 2x = 5$$

$$(b) \quad |2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$$

الجواب :

$$1 - x = 2|x| \text{ لدينا}$$

$$x \geq 0 \text{ الحالة 1 :}$$

$$\text{المعادلة تكافئ } 1 - x = 2x$$

$$\text{تعني } 1 = 3x$$

$$\text{تعني } x = \frac{1}{3}$$

الجواب :

$$(1) \quad |2x - 1| = 5$$

$$\text{يعني } 2x - 1 = 5 \text{ أو } 2x - 1 = -5$$

$$\text{يعني } 2x = 6 \text{ أو } 2x = -4$$

$$\text{يعني } x = \frac{6}{2} = 3 \text{ أو } x = -\frac{4}{2} = -2$$

$$S = \{-2, 3\} \text{ وبالتالي}$$

$$(2) \quad |2 + x| = 0 \text{ يعني } 2 + x = 0$$

$$\text{يعني } x = -2$$

$$S = \{-2\} \text{ وبالتالي}$$

$$(3) \quad |6 - x| = -1 \text{ غير ممكن لأن القيمة المطلقة}$$

$$S = \emptyset \text{ دائما موجبة.}$$

$$(4) \text{ مجموعة التعريف } D$$

$$x \in D \text{ يعني } x + 2 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -2$$

$$S = \mathbb{R} - \{-2\} \text{ وبالتالي}$$

$$| \frac{x-2}{x+2} | = 1 \text{ يعني } \frac{x-2}{x+2} = 1 \text{ أو } \frac{x-2}{x+2} = -1$$

$$\text{يعني } x - 2 = x + 2 \text{ أو } x - 2 = -x - 2$$

$$\text{يعني } -2 = 2 \text{ أو } 2x = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } -2 = 2 \text{ غير ممكن}$$

$$S = \{0\} \text{ وبالتالي}$$

تمرين 6 :

$$\text{حل في } \mathbb{R} \text{ مايلي :}$$

$$(1) \quad |2x - 1| \leq 3 \text{ ; } (3) \quad |-x - 2| < -11$$

$$(2) \quad |4x - 5| < 0 \text{ ; } (4) \quad |4x + 5| > -3$$

$$(5) \quad |x - 3| \geq 2$$



الحالة 1 : في المجال $]-\infty, \frac{1}{2}]$

المعادلة تكافئ $-3x = 3x + 1$

تكافئ $-6x = 1$

تكافئ $x = -\frac{1}{6}$

وحيث أن $-\frac{1}{6} \notin]-\infty, \frac{1}{2}]$ فإن $S_1 = \emptyset$

الحالة 2 : في المجال $[\frac{1}{2}, 1]$

المعادلة تكافئ $x + 2 = 3x + 1$

يعني $2x = 1$

يعني $x = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$

إذن $S_2 = \{\frac{1}{2}\}$

الحالة 3 : في المجال $[1, +\infty[$

المعادلة تكافئ $3x = 3x + 1$

يعني $0 = 1$ غير ممكن

إذن $S_3 = \emptyset$

الحل النهائي $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$= \{\frac{1}{2}\}$

تمرين 8:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $1 \leq x \leq 4$

و $|y + 2| < 1$ اعط تأطيرا للأعداد التالية :

$x - y$ و xy و $2\sqrt{x} + 5$ و $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{x}{y}$

الجواب :

لدينا $|y + 2| < 1$ يعني $-1 < y + 2 < 1$

يعني $-3 < y < -1$

وبالتالي $S_1 = \{\frac{1}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leq 0$

المعادلة تكافئ $1 - x = -2x$

تعني $1 = -2x + x$

تعني $1 = -x$

تعني $x = -1$

ومنه $S_2 = \{-1\}$

وبالتالي $S = S_1 \cup S_2$

$S = \{-1, \frac{1}{3}\}$

2 - a - نعتبر المعادلة : $|x - 2| + 2x = 5$

الحالة 1 : $x \geq 2$

المعادلة تكافئ $x - 2 + 2x = 5$

تكافئ $3x = 7$

تكافئ $x = \frac{7}{3}$

وحيث أن $\frac{7}{3} \geq 2$ فإن $S_1 = \{\frac{7}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leq 2$

المعادلة تكافئ $-x + 2 + 2x = 5$

تكافئ $x = 3$

وحيث أن $3 > 2$ فإن $S_2 = \emptyset$

وبالتالي $S = \{\frac{7}{3}\}$

b - لدينا $|2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$

لدينا

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$ x - 1 $	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$	$x - 1$
$ 2x + 1 + x - 1 $	$-3x$	$x + 2$	$3x$	$3x$



الجواب :

1 - أ - لدينا

$$(x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4$$

$$= x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \quad \text{ومنه}$$

ب - لدينا $2 \leq x \leq 3$ إذن $0 \leq x - 2 \leq 1$

$$0 \leq (x - 2)^2 \leq 1 \quad \text{ومنه}$$

$$-4 \leq (x - 2)^2 - 4 \leq -3$$

$$-4 \leq x^2 - 4x \leq -3 \quad \text{وبالتالي}$$

$$-4 \leq x^2 - 4x \leq -3 \quad \text{لدينا}$$

$$1 \leq x^2 - 4x + 5 \leq 2 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leq 1 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left| \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{1}{4} \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 10 :

a و b عددا حقيقيان حيث :

$$1 < 4b^2 + a^2 + 1 < 4 \quad \text{و} \quad |2a - 1| < 1$$

1 - اعط تأطيرا للعدد a

2 - بين أن $|b| < 1$

3 - أطر العدد $a \times b$

$$1 < -y < 3 \quad \text{إذن}$$

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{ولدينا}$$

$$2 \leq x - y \leq 7 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 1 < -y < 3 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ -3 < y < -1 \end{cases} \quad \text{لدينا و}$$

$$1 < -xy < 12 \quad \text{إذن}$$

$$-12 \leq xy \leq -1 \quad \text{وبالتالي}$$

$$1 \leq \sqrt{x} \leq 2 \quad \text{إذن} \quad 1 \leq x \leq 4 \quad \text{لدينا}$$

$$2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4 \quad \text{ومنه}$$

$$7 \leq 2\sqrt{x} + 5 \leq 9 \quad \text{إذن}$$

$$2 \leq x + 1 \leq 5 \quad \text{إذن} \quad 1 \leq x \leq 4 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1 \quad \text{إذن} \quad 1 < -y < 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{3} < -\frac{x}{y} < 4 \quad \text{إذن} \quad 1 < x < 4 \quad \text{ولدينا}$$

$$-4 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 9 :

ليكن x عددا حقيقيا ينتمي إلى $[2, 3]$

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \quad \text{أ - تحقق أن}$$

$$-4 \leq x^2 - 4x \leq -3 \quad \text{ب - استنتج أن}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leq 1 \quad \text{2 - بين أن :}$$

$$\left| \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{1}{4} \quad \text{ثم استنتج أن}$$

تمرين 11 :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث :

$$|a| < 1 \text{ و } |b + \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$$

1 - بين أن : $-2 < b < -1$

2 - اعط تأطيرا لـ ab^2 و $\frac{2b}{a-2}$

3 - ليكن العدد A بحيث :

$$A = -b^2 + b + ab - a$$

a - بين أن : $A = (a - b)(b - 1)$

b - اعط تأطيرا للعدد A سعته 9

الجواب :

1 - لدينا $|b + \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{2} < b + \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

$$\text{يعني } -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} < b < \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\text{يعني } -2 < b < -1$$

2 - لدينا $|a| < 1$ يعني $-1 < a < 1$

يعني $0 \leq a < 1$ أو $-1 < a \leq 0$

ولدينا $-2 < b < -1$ يعني $1 < -b < 2$

$$\text{إذن } 1 < b^2 < 4$$

الحالة 1 : $0 \leq a < 1$

$$\text{و } 1 < b^2 < 4 \text{ إذن } 0 \leq ab^2 < 4$$

الحالة 2 : $-1 < a \leq 0$ أي $0 \leq -a < 1$

$$\text{ولدينا } 1 < b^2 < 4$$

ومنه $-4 < ab^2 \leq 0$ أي $0 \leq -ab^2 < 4$

$$\text{وبالتالي } -4 < ab^2 < 4$$

الجواب :

1 - لدينا $|2a - 1| < 1$ يعني $-1 < 2a - 1 < 1$

$$\text{يعني } 0 < 2a < 2$$

$$\text{يعني } 0 < a < 1$$

2 - لدينا $1 < 4b^2 + a^2 + 1 < 4$ ①

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 < a^2 < 1$

ومنه $-1 < -a^2 < 0$ ②

بجمع ① و ② نستنتج أن

$$1 - 1 < 4b^2 + a^2 + 1 - a^2 < 4 + 0$$

$$\text{إذن } 0 < 4b^2 + 1 < 4$$

$$\text{أي } -1 < 4b^2 < 3$$

$$\text{إذن } -\frac{1}{4} < b^2 < \frac{3}{4}$$

$$\text{ومنه } 0 \leq b^2 \leq \frac{3}{4} < 1$$

$$\text{ومنه } |b| < 1$$

3 - لدينا $|b| < 1$ يعني $0 \leq b < 1$

$$\text{أو } -1 < b \leq 0$$

الحالة 1 : $0 \leq b \leq 1$

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 \leq ab < 1$

الحالة 2 : $-1 < b \leq 0$ أي $0 \leq -b < 1$

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 \leq -ab < 1$

$$\text{أي } -1 < ab \leq 0$$

$$\text{وبالتالي } -1 < ab < 1$$



الجواب :

$$|a + b - 2| < 1 \text{ لدينا } -1$$

$$-1 < a + b - 2 < 1 \text{ يعني}$$

$$\textcircled{1} \quad 1 < a + b < 3 \text{ يعني}$$

$$\text{ونعلم أن } 1 < a < 3$$

$$\textcircled{2} \quad -3 < -a < -1 \text{ أي}$$

بجمع المتفاوتتين $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نحصل على :

$$|b| < 2 \text{ أي } -2 < b < 2$$

$$-2 < b < 2 \text{ أي } |b| < 2 \text{ لدينا}$$

$$\text{ولدينا } 1 < a < 3$$

$$\text{إذن } -1 < a + b < 5$$

$$\text{ب - لدينا } a + b - 1 < \text{أي } a + b + 1 > 0$$

$$\text{إذن } |a + b + 1| = a + b + 1$$

$$\text{ولدينا } a + b - 5 < 0 \text{ إذن}$$

$$\text{إذن } |a + b - 5| = -a - b + 5$$

$$\text{وبالتالي } A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$$

$$= -a - b + 5 + a - b + 1$$

$$A = 6 \text{ إذن}$$

تمرين 13 :

ليكن x و y من R بحيث :

$$x - y = 2 \text{ و } y \leq 2 \text{ و } x \geq \frac{1}{3}$$

1 - أحسب قيمة العدد E بحيث

$$E = \sqrt{(3x - 1)^2} + \sqrt{(3y - 6)^2}$$

$$2 - \text{أ - تحقق أن } \frac{1}{3} \leq x \leq 4 \text{ و } \frac{5}{3} \leq y \leq 2$$

ب - أحسب قيمة F حيث :

$$F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$$

$$\text{لدينا } -2 < b < -1 \text{ إذن } 2 < -2b < 4$$

$$\text{ولدينا } -1 < a < -1 \text{ إذن } -3 < a - 2 < -1$$

$$\text{ومنه } -1 < \frac{1}{a-2} < -\frac{1}{3}$$

$$\text{أي } \frac{1}{3} < \frac{-1}{a-2} < 1$$

$$\text{وحيث أن } 2 < -2b < 4$$

$$\text{فإن } \frac{2}{3} < \frac{2b}{a-2} < 4$$

$$A = -b^2 + b + ab - a \text{ لدينا}$$

$$= -b(b - 1) + a(b - 1)$$

$$= (b - 1)(-b + a)$$

$$A = (a - b)(b - 1) \text{ وبالتالي}$$

$$-b \text{ لدينا } -2 < b < -1 \text{ إذن } -3 < b - 1 < -2$$

$$\text{أي } 2 < -(b - 1) < 3$$

$$\text{ولدينا } -1 < a < 1$$

$$\text{و } 1 < -b < 2 \text{ إذن } 0 < a - b < 3$$

$$\text{ومنه } 0 < -(b - 1)(a - b) < 9$$

$$\text{أي } -9 < (b - 1)(a - b) < 0$$

$$\text{إذن } -9 < A < 0$$

وهذا تأطير للعدد A سعته 9

تمرين 12 :

$$a \text{ و } b \text{ عددا حقيقيان } 1 < a < 3$$

$$\text{و } |a + b - 2| < 1$$

$$-1 \text{ بين أن } |b| < 2$$

$$2 - \text{أ - أطر العدد } a + b$$

ب - استنتج قيمة العدد

$$A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$$



تمرين 14:

نعتبر العدد الحقيقي $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$

$$A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} \quad : \text{بين أن } 1$$

2 - إذا علمت أن :

$$1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8 \text{ و } 2,6 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$$

فاعط تأطيرا للعدد A

الجواب :

1 - لدينا :

$$(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{7})^2 - 12\sqrt{21} + (3\sqrt{3})^2$$

$$= 28 - 12\sqrt{21} + 27$$

$$= 55 - 12\sqrt{21}$$

$$A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\begin{cases} 2,6 < \sqrt{7} < 2,7 \\ 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \end{cases} \quad \text{لدينا } 2$$

$$5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4 \quad \text{إذن}$$

$$-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$$

$$5,2 - 5,4 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 5,4 - 5,1 \quad \text{ومنه}$$

$$-0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3 \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 15:

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $2x^2 - 8 \leq 0$

$$\text{و } |y - 1,25| \leq 25 \cdot 10^{-2}$$

$$-2 \leq x \leq 2 \quad : \text{بين أن } 1$$

$$1 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

2 - حدد تأطيرا لكل من العددين xy و $x^2 - y$

الجواب :

$$E = \sqrt{(3x - 1)^2} + \sqrt{(3y - 6)^2} \quad \text{لدينا } 1$$

$$= |3x - 1| + |3y - 6|$$

$$= 3x - 1 - (3y - 6) \quad \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 3y - 6 \leq 0 \end{cases} \quad \text{لأن}$$

$$= 3x - 1 - 3y + 6$$

$$= 3(x - y) + 5$$

$$= 3 \times 2 + 5$$

$$E = 11$$

إذن

$$2 - \text{أ - لنتحقق أن } \frac{1}{3} \leq x \leq 4 \text{ و } -\frac{5}{3} \leq y \leq 2$$

$$\text{لدينا } \frac{1}{3} \leq x$$

$$\text{ولدينا } x - y = 2 \quad \text{إذن } x = y + 2$$

$$\text{ونعلم أن } y \leq 2 \quad \text{إذن } y + 2 \leq 4 \quad \text{أي } x \leq 4$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \leq x \leq 4} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{لدينا } y \leq 2$$

$$\text{ونعلم أن } \frac{1}{3} \leq x \text{ و } x = y + 2$$

$$\text{إذن } \frac{1}{3} \leq y + 2 \quad \text{أي } \frac{1}{3} - 2 \leq y$$

$$\text{يعني } y + 2 \leq 4$$

$$\boxed{-\frac{5}{3} \leq y \leq 2} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{ب - لدينا } \frac{1}{3} \leq x \leq 4 \quad \text{إذن } -\frac{4}{3} \leq x + y \leq 6$$

$$\text{ومنه } x + y - 6 \leq 0 \text{ و } x + y + \frac{4}{3} \geq 0$$

$$\text{إذن } F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$$

$$= -x - y + 6 + x + y + \frac{4}{3}$$

$$F = \frac{22}{3}$$

ومنه

الجواب :

1 - لدينا $2x^2 - 8 \leq 0$ يعني $x^2 \leq \frac{8}{2}$

يعني $x^2 \leq 4$

يعني $|x| \leq 2$

يعني $-2 \leq x \leq 2$

لدينا $|y - 1,25| \leq 25 \cdot 10^{-2}$

يعني $-25 \cdot 10^{-2} < y - 1,25 < 25 \cdot 10^{-2}$

$-25 \cdot 10^{-2} + 1,25 < y < 1,25 + 25 \cdot 10^{-2}$

يعني $-0,25 + 1,25 \leq y \leq 1,25 + 0,25$

يعني $1 \leq y \leq 1,5$

أي $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$

2 - لدينا $-2 \leq x \leq 2$

يعني $0 \leq x^2 \leq 2$

و $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$

يعني $-\frac{3}{2} \leq -y \leq -1$

ومنه $0 - \frac{3}{2} \leq x^2 - y \leq 2 - 1$

أي $-\frac{3}{2} \leq x^2 - y \leq 1$

لدينا $-2 \leq x \leq 2$ أي $0 \leq x \leq 2$

أو $-2 \leq x \leq 0$

الحالة 1 : $0 \leq x \leq 2$

ولدينا $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$

إذن $0 \leq xy \leq 3$

الحالة 2 : $-2 \leq x \leq 0$ أي $0 \leq -x \leq 2$

ولدينا $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$

إذن $0 \leq -xy \leq 3$

أي $-3 \leq xy \leq 0$

$-3 \leq xy \leq 3$

التأثير النهائي

تمرين 16 :

ليكن a من $\mathbb{R}$ نضع $E = 1 + \frac{3}{2} \left(a + \frac{a^2 - 2a}{6} \right)$

1 - بين أن : $E = \left(\frac{1}{2} a + 1 \right)^2$

2 - نفترض أن : $-3 < a \leq -1$

بين أن : $\sqrt{E} \leq \frac{1}{2}$

3 - حدد قيمة a إذا علمت أن : $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$

الجواب :

1 - لدينا $E = 1 + \frac{3}{2} a + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}$

$= 1 + a + \left(\frac{a}{2} \right)^2$

$= \left(1 + \frac{a}{2} \right)^2$

وبالتالي $E = \left(\frac{1}{2} a + 1 \right)^2$

2 - لدينا $-3 < a \leq -1$

إذن $-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} a \leq -\frac{1}{2}$

أي $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} a + 1 \leq \frac{1}{2}$

أي $\sqrt{E} \leq \frac{1}{2}$ ومنه $\left| \frac{1}{2} a + 1 \right| \leq \frac{1}{2}$

3 - لدينا $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$ يعني $\left| \frac{1}{2} a + 1 \right| = \frac{1}{4}$

تمرين 18:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$1 - \frac{2-x}{3} \leq \frac{2-x}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3x+4}{5} - \frac{3}{2} < \frac{x-1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} - [1 - 3(\frac{x+1}{2})] \geq \frac{2-x}{4} \quad (3)$$

$$\frac{0,1x-1}{4} - \frac{4+x}{5} > \frac{1-0,3x}{2} \quad (4)$$

الجواب :

$$\frac{3-2+x}{3} \leq \frac{2-x}{4} \text{ يعني } 1 - \frac{2-x}{3} \leq \frac{2-x}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1+x}{3} \leq \frac{2-x}{4} \text{ يعني}$$

$$4 + 4x \leq 6 - 3x \text{ يعني}$$

$$4x + 3x \leq 6 - 4 \text{ يعني}$$

$$7x \leq 2 \text{ يعني}$$

$$x \leq \frac{2}{7} \text{ يعني}$$

$$S =]-\infty, \frac{2}{7}] \text{ وبالتالي}$$

$$\frac{3x+4}{5} - \frac{3}{2} < \frac{x-1}{3} \text{ لدينا } (2)$$

$$\frac{6x+8-15}{10} < \frac{x-1}{3} \text{ يعني}$$

$$\frac{6x-7}{10} < \frac{x-1}{3} \text{ يعني}$$

$$3(6x-7) < 10(x-1) \text{ يعني}$$

$$18x - 21 < 10x - 10 \text{ يعني}$$

$$18x - 10x < 21 - 10 \text{ يعني}$$

$$8x < 11 \text{ يعني}$$

$$\frac{1}{2}a + 1 = -\frac{1}{4} \text{ أو } \frac{1}{2}a + 1 = \frac{1}{4} \text{ يعني}$$

$$\frac{1}{2}a = -\frac{5}{4} \text{ أو } \frac{1}{2}a = -\frac{3}{4} \text{ يعني}$$

$$a = -\frac{5}{2} \text{ أو } a = -\frac{3}{2} \text{ يعني}$$

تمرين 17:

a و b عددا حقيقيان موجبان قطعاً

$$1 - \text{بين أن : } 0 < \sqrt{a+b} - \sqrt{a} < \frac{b\sqrt{a}}{2a}$$

$$2 - \text{استنتج مقارنة للعددين } \sqrt{7} - \sqrt{5} \text{ و } \frac{\sqrt{5}}{5}$$

اكاديمية تطوان 94

الجواب :

$$1 - \text{لدينا } b > 0 \text{ إذن } a + b > a$$

$$\sqrt{a+b} > \sqrt{a} \text{ ومنه}$$

$$0 < \sqrt{a+b} - \sqrt{a} \text{ أي}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = \frac{a+b-a}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}} \text{ لدينا}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}} < \frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} < \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{2a} \text{ إذن}$$

$$0 < \sqrt{a+b} - \sqrt{a} < \frac{b\sqrt{a}}{2a} \text{ وبالتالي}$$

$$2 - \text{نضع } a = 5 \text{ و } b = 2$$

$$\text{لدينا } a > 0 \text{ و } b > 0 \text{ إذن حسب السؤال 1}$$

$$\text{فإن } 0 < \sqrt{5+2} - \sqrt{2} < \frac{2\sqrt{5}}{2 \times 5}$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ وبالتالي}$$

تمرين 19:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

$$x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geq \frac{5x+7}{3} \quad (1)$$

$$8 - 2[1 - (x+2)] \leq 10 + 2x \quad (2)$$

$$-3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)] \quad (3)$$

الجواب :

$$(1) \text{ لدينا } x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geq \frac{5x+7}{3}$$

(نضرب الطرفين في 6)

$$6x + 4x - 2 + 15 \geq 10x + 14 \quad \text{يعني}$$

$$10x - 10x \geq 14 - 13 \quad \text{يعني}$$

$$0 \geq 1 \quad \text{يعني وهذا غير ممكن}$$

$$S = \emptyset \quad \text{إذن}$$

$$(2) \text{ لدينا } 8 - 2[1 - (x+2)] \leq 10 + 2x$$

$$8 - 2 + 2x + 4 \leq 10 + 2x \quad \text{يعني}$$

$$10 + 2x \leq 10 + 2x \quad \text{يعني}$$

$$0 \leq 0 \quad \text{يعني وهذا دائما صحيح}$$

$$S = \mathbb{R} \quad \text{وبالتالي}$$

$$(3) \text{ لدينا } -3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)]$$

$$-3x + 4 > 9x + 24 - 8 - 12x - 12 \quad \text{يعني}$$

$$-3x - 9x + 12x > 4 - 4 \quad \text{يعني}$$

$$0 > 0 \quad \text{يعني وهذا غير صحيح}$$

$$S = \emptyset \quad \text{وبالتالي}$$

$$x < \frac{11}{8} \quad \text{يعني}$$

$$S =]-\infty, \frac{11}{8}[\quad \text{وبالتالي}$$

$$(3) \text{ لدينا } \frac{3}{4} - [1 - 3(\frac{x+1}{2})] \geq \frac{2-x}{4}$$

$$\frac{3}{4} - 1 + 3(\frac{x+1}{2}) \geq \frac{x}{3} \quad \text{يعني}$$

$$-\frac{1}{4} + 3(\frac{x+1}{2}) \geq \frac{x}{3} \quad \text{يعني}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3}x \quad \text{يعني}$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{7}{6}x \geq -\frac{5}{4} \quad \text{يعني}$$

$$x \geq \frac{6}{7} \times -\frac{5}{4} \quad \text{يعني}$$

$$x \geq -\frac{15}{14} \quad \text{يعني}$$

$$S = [-\frac{15}{14}, +\infty[\quad \text{وبالتالي}$$

$$(4) \text{ لدينا } \frac{0,1x-1}{4} - \frac{4+x}{5} > \frac{1-0,3x}{2}$$

$$\frac{0,5x - 5 - 16 - 4x}{20} > \frac{1 - 0,3x}{2} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{-3,5x - 21}{20} > \frac{10 - 3x}{20} \quad \text{يعني}$$

$$-3,5x - 21 > 10 - 3x \quad \text{يعني}$$

$$-3,5x + 3x > 21 + 10 \quad \text{يعني}$$

$$-0,5x > 31 \quad \text{يعني}$$

$$x < \frac{-31}{0,5} \quad \text{يعني}$$

$$x < -62 \quad \text{يعني}$$

$$S =]-\infty, -62[\quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 20:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\frac{2}{x+4} \geq 3 \quad (1)$$

$$\frac{3x-2}{x+2} < 3 \quad (2)$$

$$\frac{2}{x-2} \geq \frac{1}{x+2} \quad (3)$$

$$|2x-3| \geq |x+1| \quad (4)$$

الجواب :

$$(1) \text{ لدينا } \frac{2}{x+4} \geq 3$$

مجموعة التعريف D :

$$x \in D \text{ يعني } x+4 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -4$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{-4\}$$

$$\text{المتراجحة تكافئ } \frac{2}{x+4} - 3 \geq 0$$

$$\text{يعني } \frac{2-3x-12}{x+4} \geq 0$$

$$\text{يعني } \frac{-3x-10}{x+4} \geq 0$$

x	$-\infty$	-4	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$-3x-10$	+	+	○	-
$x+4$	-	○	+	+
$\frac{-3x-10}{x+4}$	-		+	○

$$\text{وبالتالي } S =]-4, -\frac{10}{3}]$$

$$(2) \text{ لدينا } \frac{3x-2}{x+2} < 3$$

مجموعة التعريف D :

$$x \in D \text{ يعني } x+2 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -2$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{المتراجحة تكافئ } \frac{3x-2}{x+2} < 3$$

$$\text{يعني } \frac{3x-2-3x-6}{x+2} < 0$$

$$\text{يعني } \frac{-8}{x+2} < 0$$

$$\text{يعني } x+2 > 0$$

$$\text{يعني } x > -2$$

$$\text{وبالتالي } S =]-2, +\infty[$$

$$(3) \text{ لدينا } \frac{2}{x-2} \geq \frac{1}{x+2}$$

مجموعة التعريف D :

$$x \in D \text{ يعني } x-2 \neq 0 \text{ و } x+2 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq 2 \text{ و } x \neq -2$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{المتراجحة تكافئ } \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} \geq 0$$

$$\text{يعني } \frac{2x+4-x+2}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\text{يعني } \frac{x+6}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-6	-2	2	$+\infty$
$x+6$	-	○	+	+	+
$x-2$	-	-	-	○	+
$x+2$	-	-	○	+	+
$\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$	-	○	+		+

الحل في $\mathbb{R}$ هو : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
 $=]-\infty, -1] \cup [-1, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$
 $S =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$

تمرين 21:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\frac{1}{x+2} \leq 1 \quad (1)$$

$$\frac{3x+1}{x-2} < 2 \quad (2)$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leq 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{x+3} \geq \frac{2}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1} \quad (5)$$

الجواب :

$$(1) \text{ لدينا } \frac{1}{x+2} \leq 1$$

مجموعة التعريف $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\frac{1}{x+2} - 1 \leq 0 \quad \text{المتراجحة تكافئ}$$

$$\frac{1-x-2}{x+2} \leq 0 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{-x-1}{x+2} \leq 0 \quad \text{يعني}$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$-x-1$	+	+	○	-
$x+2$	-	○	+	+
$\frac{-x-1}{x+2}$	-	+	○	-

وبالتالي : $S = [-6, -2[\cup]2, +\infty[$

$$(4) \text{ لدينا } |2x-3| \geq |x+1|$$

$$|2x-3| - |x+1| \geq 0 \quad \text{يعني}$$

لدينا

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ 2x-3 $	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$	$2x-3$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$ 2x-3 - x+1 $	$-x+4$	$-3x+2$	$x-4$	$x-4$

في المجال $]-\infty, -1]$

$$\text{المتراجحة تكافئ } -x+4 \geq 0$$

$$\text{يعني } -x \geq -4$$

$$\text{يعني } x \leq 4$$

$$S_1 =]-\infty, 4] \cap]-\infty, -1] =]-\infty, -1]$$

في المجال $[-1, \frac{3}{2}]$

$$\text{المتراجحة تكافئ } -3x+2 \geq 0$$

$$\text{يعني } -3x \geq -2$$

$$\text{يعني } x \leq \frac{2}{3}$$

$$S_2 =]-\infty, \frac{2}{3}] \cap [-1, \frac{3}{2}] = [-1, \frac{2}{3}]$$

في المجال $[\frac{3}{2}, +\infty[$

$$\text{المتراجحة تكافئ } x-4 \geq 0$$

$$\text{يعني } x \geq 4$$

$$S_3 = [\frac{3}{2}, +\infty[\cap [4, +\infty[= [4, +\infty[$$



$$(4) \text{ لدينا } \frac{1}{x+3} \geq \frac{2}{x+1}$$

مجموعة التعريف : D

$$x \in D \text{ يعني } x+3 \neq 0 \text{ و } x+1 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -3 \text{ و } x \neq -1$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$$

$$\text{المترابحة تكافئ } \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} \leq 0$$

$$\text{يعني } \frac{x+1-2x-6}{(x+3)(x+1)} \leq 0$$

$$\text{يعني } \frac{-x-5}{(x+3)(x+1)} \leq 0$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$
$-x-5$	+	○	-	-	-
$x+3$	-	-	○	+	+
$x+1$	-	-	-	○	+
$\frac{-x-5}{(x+3)(x+1)}$	+	○	-	+	-

ومنه مجموعة الحلول هي :

$$S = [-5, -3[\cup]-1, +\infty[$$

$$(5) \text{ لدينا } \frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1}$$

مجموعة التعريف : D

$$x \in D \text{ يعني } x^2-1 \neq 0 \text{ و } x+1 \neq 0 \text{ و } x-1 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq 1 \text{ و } x \neq -1 \text{ و } x \neq -1$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\text{المترابحة تكافئ } \frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{يعني } \frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

$$\text{وبالتالي } S =]-\infty, -2[\cup [-1, +\infty[$$

$$(2) \text{ لدينا } \frac{3x+1}{x-2} < 2$$

مجموعة التعريف : D

$$D = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{المترابحة تكافئ } \frac{3x+1}{x-2} - 2 < 0$$

$$\text{يعني } \frac{3x+1-2x+4}{x-2} < 0$$

$$\text{يعني } \frac{x+5}{x-2} < 0$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$x+5$	-	○	+	+
$x-2$	-	-	○	+
$\frac{x+5}{x-2}$	+	○	-	+

$$\text{وبالتالي } S =]-5, 2[$$

$$(3) \text{ لدينا } x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leq 0$$

$$\text{يعني } x^2(x+3) - 2(x+3) \leq 0$$

$$\text{يعني } (x+3)(x^2-2) \leq 0$$

$$\text{يعني } (x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+3$	-	○	+	+	+
$x-\sqrt{2}$	-	-	-	○	+
$x+\sqrt{2}$	-	-	○	+	+
$(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$	-	○	+	○	+

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S =]-\infty, -3] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\frac{2x^2 - x - 2x + 1 - 2x^2 - 3x - 6x - 9}{(x+3)(x+1)} < 0 \text{ يعني}$$

$$\frac{-12x - 8}{(2x+3)(2x-1)} < 0 \text{ يعني}$$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-12x - 8$	+	+	○	-	-
$2x + 3$	-	○	+	+	+
$2x - 1$	-	-	-	○	+
$\frac{-12x - 8}{(2x+3)(2x-1)}$	+	-	○	+	-

ومنه مجموعة الحلول هي :

$$S =] -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3} [\cup] \frac{1}{2}, +\infty [$$

$$(2) \text{ لدينا } \sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$$

مجموعة التعريف D :

$$x \in D \text{ يعني } x-1 \geq 0 \text{ و } 2x-3 \geq 0$$

$$\text{يعني } x \geq 1 \text{ و } x \geq \frac{3}{2}$$

$$D = [\frac{3}{2}, +\infty [\text{ ومنه}$$

$$\text{المترابحة تكافئ } (\sqrt{x-1})^2 < (\sqrt{2x-3})^2$$

$$\text{يعني } x-1 < 2x-3$$

$$\text{يعني } x-2x < 1-3$$

$$\text{يعني } -x < -2$$

$$\text{يعني } x > 2$$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S = [-\frac{3}{2}, +\infty [\cap] 2, +\infty [$$

$$S =] 2, +\infty [$$

$$(3) \text{ لدينا } x-3 < \sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{4 + x(x-1) - (x+1)^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \text{ يعني}$$

$$\frac{4 + x^2 - x - x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \text{ يعني}$$

$$\frac{-3x+3}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \text{ يعني}$$

$$\frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \text{ يعني}$$

$$\frac{-3}{x+1} \geq 0 \text{ يعني}$$

$$\text{يعني } x+1 < 0$$

$$\text{يعني } x < -1$$

$$\text{وبالتالي } S =] -\infty, -1 [$$

تمرين 22:

حل في $\mathbb{R}$ المترابحات التالية :

$$(1) \frac{x-1}{2x+3} < \frac{x+3}{2x-1}$$

$$(2) \sqrt{x-1} < \sqrt{2x-1}$$

$$(3) x-3 < \sqrt{x^2+1}$$

الجواب :

(1) مجموعة التعريف D :

$$x \in D \text{ يعني } 2x+3 \neq 0 \text{ و } 2x-1 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -\frac{3}{2} \text{ و } x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{وبالتالي } D = \mathbb{R} - \{ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \}$$

$$\text{المترابحة تكافئ } \frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+3}{2x-1} < 0$$

$$\text{يعني } \frac{(x-1)(2x-1) - (x+3)(2x+3)}{(x+3)(x+1)} < 0$$

الجواب :

(1) لدينا $|x-2| \geq x$
إذا كانت $x \geq 2$ المتراجحة تكافئ $x-2 \geq x$
يعني $-2 \geq 0$
وهذا غير ممكن ومنه $S_1 = \emptyset$
إذا كانت $x \leq 2$ المتراجحة تكافئ $-x+2 \geq x$
يعني $-2x \geq -2$
يعني $x \leq 1$
وبالتالي $S_2 =]-\infty, 1] \cap]-\infty, 2]$
 $=]-\infty, 1]$

الحل النهائي

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$=]-\infty, 1]$$

(2) لدينا $1-x < |x|$

الحالة 1 : $x \geq 0$ إذن $|x| = x$

المتراجحة تكافئ $1-x < x$

يعني $1 < 2x$

يعني $x > \frac{1}{2}$

ومنه $S_1 =]\frac{1}{2}, +\infty[\cap [0, +\infty[$

$$=]\frac{1}{2}, +\infty[$$

الحالة 2 : $x \leq 0$ إذن $|x| = -x$

المتراجحة تكافئ $1-x < -x$

يعني $1 < 0$ وهذا غير ممكن

$$S_2 = \emptyset$$

ومنه

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x^2 + 1 \geq 0$ وهذا دائما صحيح

ومنه $D = \mathbb{R}$

إذا كان $x \leq 3$ فإن $x-3 \leq 0$

ويكون لدينا $x-3 < \sqrt{x^2+1}$ لكل $x \leq 3$

إذن $S_1 =]-\infty, 3[$

إذا كان $x \geq 3$

فإن $x-3 < \sqrt{x^2+1}$ تكافئ $(x-3)^2 < x^2+1$

يعني $x^2 - 6x + 9 < x^2 + 1$

يعني $-6x < -8$

يعني $6x > 8$

يعني $x > \frac{8}{6}$

يعني $x > \frac{4}{3}$

ومنه $S_2 =]\frac{4}{3}, +\infty[\cap [3, +\infty[$

$$= [3, +\infty[$$

الحل النهائي

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$=]\frac{4}{3}, +\infty[\cap [3, +\infty[$$

إذن $S = \mathbb{R}$

تمرين 23 :

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

(1) $|x-2| \geq x$

(2) $1-x < |x|$

(3) $|x+1| - |x| \geq 0$

تمرين 24:

حل وناقش في $\mathbb{R}$ حسب قيم البارامتر الحقيقي m .

$$mx - 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$2(m - x) \geq m(1 - x) \quad (2)$$

الجواب :

(1) لدينا $mx - 2 \geq 0$ يعني $mx \geq 2$

الحالة 1 : $m = 0$ المتراجحة تكافئ $0 \geq 2$ غير

ممکن في هذه الحالة $S = \emptyset$

الحالة 2 : $m > 0$

المتراجحة تكافئ $x \geq \frac{2}{m}$

في هذه الحالة : $S = \left[\frac{2}{m}, +\infty \right[$

الحالة 3 : $m < 0$

المتراجحة تكافئ $mx \geq 2$

يعني $x \leq \frac{2}{m}$

في هذه الحالة $S = \left] -\infty, \frac{2}{m} \right]$

(2) لدينا $2(m - x) \geq m(1 - x)$

يعني $2m - 2x \geq m - mx$

يعني $-2x + mx \geq m - 2m$

يعني $(m - 2)x \geq -m$

الحالة 1 : $m = 2$

المتراجحة تكافئ $0 \geq -2$ وهذا دائما صحيح

الحل في هذه الحالة $S = \mathbb{R}$

الحالة 2 : $m > 2$ أي $m - 2 > 0$

الحل النهائي

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$= \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$(3) \text{ لدينا } |x + 1| - |x| \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$ x + 1 $	$-x - 1$	$\circ$	$x + 1$	$x + 1$
$ x $	$-x$	$-x$	$\circ$	x
$ x + 1 - x $	-1	$2x + 1$	1	

في المجال $]-\infty, -1[$

المتراجحة تكافئ $-1 \geq 0$ غير ممكن

إذن $S_1 = \emptyset$

في المجال $[-1, 0]$

المتراجحة تكافئ $2x + 1 \geq 0$

يعني $2x \geq -1$

يعني $x \geq -\frac{1}{2}$

$$S_2 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\cap [-1, 0] \\ = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$$

في المجال $[0, +\infty[$

المتراجحة تكافئ $1 \geq 0$ وهذا صحيح لكل

$$x \in [0, +\infty[$$

$$S_3 = [0, +\infty[$$

الحل النهائي

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$= \emptyset \cup \left[-\frac{2}{3}, 0 \right] \cup [0, +\infty[$$

$$S = \left[-\frac{2}{3}, +\infty \right[$$



$$\left| \frac{1}{3} - 0,4 \right| < 10^{-1} \quad \text{أي أن}$$

ومنه 0,4 تقرب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

$$\left| \frac{1}{7} - 0,14 \right| < 5 \times 10^{-3} \quad \text{لنبين أن (2)}$$

$$\left| \frac{1}{7} - 0,14 \right| = \left| \frac{1}{7} - \frac{14}{100} \right| \quad \text{لدينا}$$

$$= \left| \frac{1}{7} - \frac{7}{50} \right|$$

$$= \left| \frac{50 - 49}{350} \right|$$

$$= \frac{1}{350}$$

$$350 > 200 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{350} < \frac{1}{200} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{350} < 5 \times 10^{-3} \quad \text{ومنه}$$

$$\left| \frac{1}{7} - 0,14 \right| < 5 \times 10^{-3} \quad \text{إذن}$$

إذن 0,14 تقرب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

$$\left| \frac{7}{6} - 1,16 \right| < 10^{-2} \quad \text{لنبين أن (3)}$$

$$\left| \frac{7}{6} - 1,16 \right| = \left| \frac{7}{6} - \frac{116}{100} \right| \quad \text{لدينا}$$

$$= \left| \frac{7}{6} - \frac{29}{25} \right|$$

$$= \left| \frac{175 - 174}{150} \right|$$

$$= \frac{1}{150}$$

$$150 > 100 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{150} < \frac{1}{100} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{150} < 10^{-2} \quad \text{أي أن}$$

$$\left| \frac{7}{6} - 1,16 \right| < 10^{-2} \quad \text{ومنه}$$

إذن العدد 1,16 تقرب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}

$$(m - 2)x \geq -m \quad \text{المترابحة تكافئ}$$

$$x \geq \frac{-m}{m-2} \quad \text{يعني}$$

$$x \geq \frac{m}{2-m} \quad \text{يعني}$$

$$S = \left] \frac{m}{2-m}, +\infty \right[\quad \text{وبالتالي}$$

$$m - 2 < 0 \quad \text{أي } m < 2 \quad \text{الحالة 3 :}$$

$$(m - 2)x \geq -m \quad \text{المترابحة تكافئ}$$

$$x \leq \frac{-m}{m-2} \quad \text{يعني}$$

$$x \leq \frac{m}{2-m} \quad \text{يعني}$$

$$S = \left] -\infty, \frac{m}{2-m} \right[\quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 25:

(1) بين أن 0,4 تقرب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

(2) بين أن 0,14 تقرب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

(3) بين أن 1,16 تقرب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}

الجواب :

$$\left| \frac{1}{3} - 0,4 \right| < 10^{-1} \quad \text{(1) لنبين أن}$$

$$\left| \frac{1}{3} - 0,4 \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{4}{10} \right| \quad \text{لدينا}$$

$$= \left| \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right|$$

$$= \left| \frac{5-6}{15} \right|$$

$$= \frac{1}{15}$$

$$15 > 10 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{10} \quad \text{إذن}$$

تمارين 26:

(1) اعط تقريبا يافراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

(2) اعط تقريبا بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 5×10^{-4}

(3) ليكن $a < x < b$

بين أن $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$

الجواب :

(1) لدينا $\frac{1}{3} \approx 0,333\ldots$

إذن $0,33 < \frac{1}{3} < 0,41$

ومنه العدد 0,41 تقريب يافراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

(2) لدينا $\frac{7}{6} \approx 1,6666\ldots$

إذن $1,6666 < \frac{7}{6} < 1,6671$

إذن العدد 1,6666 تقريب بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 5×10^{-4}

(3) لدينا $a < x < b$

إذن $a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2}$

$\frac{2a - a - b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{2b - a - b}{2}$

أي أن $\frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$

أي أن $-(\frac{b-a}{2}) < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$

إذن $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

إذن العدد $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$

تمارين 27:

ليكن x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

(1) بين أن $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

(2) حدد تأطيرا للعدد $\frac{x}{x-1}$

الجواب :

(1) x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

تعني أن $|\frac{2}{3} - x| < 2 \times 10^{-1}$

أي أن $-2 \times 10^{-1} < \frac{2}{3} - x < 2 \times 10^{-1}$

أي أن $-\frac{1}{5} < \frac{2}{3} - x < \frac{1}{5}$

إذن $-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} < -x < \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$

إذن $-\frac{13}{15} < -x < -\frac{7}{15}$

أي أن $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

(2) لدينا $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1}$

$= \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$

$= 1 + \frac{1}{x-1}$

لدينا $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

أي أن $\frac{7}{15} - 1 < x - 1 < \frac{13}{15} - 1$

أي أن $-\frac{8}{15} < x - 1 < -\frac{2}{15}$

إذن $-\frac{15}{2} < \frac{1}{x-1} < -\frac{15}{8}$

ومنه $1 - \frac{15}{2} < 1 + \frac{1}{x-1} < 1 - \frac{15}{8}$



$$-\frac{13}{6} < a + b < \frac{13}{6}$$

إذن

$$-\frac{5}{3} < b < -\frac{1}{3}$$

لدينا

$$-3 < \frac{1}{b} < -\frac{3}{5}$$

إذن

$$\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$$

و

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$$

ولدينا

$$-\frac{1}{2} < a < 0 \text{ أو } 0 < a < \frac{5}{2}$$

إذن

$$\text{لدينا } \begin{cases} 0 < a < \frac{5}{2} \\ \frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3 \end{cases} \text{ إذن } 0 < -\frac{a}{b} < \frac{15}{2}$$

$$-\frac{15}{2} < \frac{a}{b} < 0$$

إذن

$$\text{لدينا } -\frac{1}{2} < a < 0 \text{ و } \frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$$

$$\text{إذن } 0 < -a < \frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$$

$$0 < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$$

إذن

$$\text{لدينا } -\frac{15}{2} < \frac{a}{b} < 0 \text{ أو } 0 < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$$

$$\text{اذن } -\frac{15}{2} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$$

تمرين 29:

(1) قارن العددين $3\sqrt{3}$ و $2\sqrt{7}$

(2) احسب $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

(3) نضع $X = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$ بسط X

(4) علما أن $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

حدد تقريب للعدد x إلى 0,3

$$-\frac{13}{2} < \frac{x}{x-1} < -\frac{7}{8}$$

ومنه

تمرين 28:

نعتبر : 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

-1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

(1) أطر العددين a و b

(2) أطر العددين a+b و $\frac{a}{b}$

الجواب :

(1) لدينا 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

$$|a - 1| < \frac{3}{2}$$

أي أن

$$-\frac{3}{2} < a - 1 < \frac{3}{2}$$

أي أن

$$-\frac{3}{2} + 1 < a < \frac{3}{2} + 1$$

$$-\frac{1}{2} < a < +\frac{5}{2}$$

ومنه

لدينا -1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

$$|b + 1| < \frac{2}{3}$$

أي أن

$$-\frac{2}{3} < b + 1 < \frac{2}{3}$$

إذن

$$-\frac{2}{3} - 1 < b < \frac{2}{3} - 1$$

أي أن

$$-\frac{5}{3} < b < -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$$

(2) لدينا

$$-\frac{5}{3} < b < -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{5}{3} < a + b < \frac{5}{2} - \frac{1}{3}$$

إذن

الجواب :

(1) لدينا $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$

$(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$

إذن $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$

ومنه $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

(2) لدينا $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

$= (3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2(3\sqrt{3}) \times (2\sqrt{7})$

$= 27 + 28 - 12\sqrt{21}$

$= 55 - 12\sqrt{21}$

إذن $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = 55 - 12\sqrt{21}$

(3) لدينا $= \sqrt{(55 - 12\sqrt{21})}$

$= \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2}$

$= |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$

$= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

لأن $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

إذن $X = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

(4) لدينا $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

إذن $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

إذن $-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ومنه $-0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$

ومنه $-0,3 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} - 0,1 < -0,2$

إذن $-0,3 < X - 0,1 < 0,2 < 0,3$

إذن $-0,3 < X - 0,1 < 0,3$

أي أن $|X - 0,1| < 0,3$

إذن 0,1 تقريب للعدد X إلى 0,3

تمرين 30 :

إذا علمت أن :

2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

اعط تقريبا للعدد $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ إلى الدقة 10^{-2}

الجواب :

لدينا 2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

إذن $|\sqrt{7} - 2,645| < 0,005$

أي أن $-0,005 < \sqrt{7} - 2,645 < 0,005$

إذن $+2,64 < \sqrt{7} < +2,65$

لدينا 1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

إذن $|\sqrt{2} - 1,415| < 0,005$

أي أن $-0,005 < \sqrt{2} - 1,415 < 0,005$

إذن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

ومنه $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$

إذن $2,64 + (-1,42) < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 2,65 + (-1,41)$

$1,22 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 1,42$

لدينا $\frac{1,22 + 1,24}{2} = 1,23$

إذن $-0,01 < (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - 1,23 < 0,01$

إذن $|\sqrt{7} - \sqrt{2} - 1,23| < 0,01$

تمرين 32:

(1) أ - بين أن لكل $a > 0$; $\sqrt{a+5} < \sqrt{a} + \sqrt{5}$

ب - استنتج أن :

لكل a من المجال $]0,5[$

$$0 < (\sqrt{5} - \sqrt{a}) < \frac{5-a}{\sqrt{5}+a}$$

ليكن x من المجال $]4,5[$ بين أن $\frac{\sqrt{5}}{2} + 1$ قيمة

مقربة للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}

الجواب :

(1) أ - لدينا $(\sqrt{a+5})^2 = a+5$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{5})^2 = 5 + a + 2\sqrt{a}\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{a+5})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{5})^2 \quad \text{إذن}$$

$$\sqrt{a+5} < (\sqrt{a} + \sqrt{5}) \quad \text{ومنه}$$

لأن $\sqrt{a+5}$ و $\sqrt{a} + \sqrt{5}$ موجبان

ب - لدينا $0 < a < 5$

$$0 < \sqrt{a} < \sqrt{5} \quad \text{إذن}$$

إذن $\sqrt{5} - \sqrt{a} > 0$ ومنه $\sqrt{a} < \sqrt{5}$ ①

$$\sqrt{5} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{a})(\sqrt{5} + \sqrt{a})}{\sqrt{5} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{5-a}{\sqrt{5} + \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a+5} < \sqrt{a} + \sqrt{5} \quad \text{بما أن}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+5}} > \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{5}} \quad \text{فإن}$$

وبما أن $5-a > 0$

$$|\sqrt{7} - \sqrt{2} - 1,23| < 10^{-2} \quad \text{إذن}$$

أي أن 1,23 تقريبا للعدد $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ إلى 10^{-2}

تمرين 31:

ليكن x من $\mathbb{R}$ نضع $B = 2x - 2$

$$A = x^2 - 2x + 2 \quad \text{و}$$

(1) تحقق من أن $|A - B| = (x - 2)^2$

(2) نفترض أن x ينتمي إلى المجال $[1,9; 2,1]$.

أ - أطر العدد $x - 2$

ب - استنتج أن B تقرب للعدد A إلى 10^{-2}

الجواب :

(1) لدينا $|A - B| = |x^2 - 2x + 2 - 2x + 2|$

$$= |x^2 - 4x + 4|$$

$$= |(x - 2)^2|$$

$$= (x - 2)^2$$

إذن $|A - B| = (x - 2)^2$

(2) أ - لدينا $x \in [1,9; 2,1]$

إذن $1,9 < x < 2,1$

$$-0,1 < x - 2 < 0,1 \quad \text{ومنه}$$

$$-0,1 < x - 2 < 0,1 \quad \text{ب - لدينا}$$

$$0 < (x - 2)^2 < 0,01 \quad \text{ومنه}$$

$$(x - 2)^2 < 0,01 \quad \text{إذن}$$

$$|A - B| < 10^{-2} \quad \text{أي أن}$$

إذن B تقرب للعدد A إلى 10^{-2}

$$1 - \frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) < \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$|\sqrt{x} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)| < \frac{\sqrt{5} - 2}{2}$$

حسب ① ب لدينا : نأخذ $a = 4$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{2} < \frac{5 - 4}{2 \times \sqrt{5} + 4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < 2 \times 10^{-2}$$

$$|\sqrt{x} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)| < 2 \times 10^{-2}$$

إذن $\frac{\sqrt{5}}{2} + 1$ تقريب للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}

$$\frac{5 - a}{\sqrt{a} + 5} > \frac{5 - a}{\sqrt{a} + \sqrt{5}}$$

قإن

$$\frac{5 - a}{\sqrt{a} + 5} > \sqrt{5} - \sqrt{a}$$

إذن

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{5} - \sqrt{a} < \frac{5 - a}{\sqrt{a} + 5}$$

أي أن

من ① و ② نستنتج أن :

$$0 < \sqrt{5} - \sqrt{a} < \frac{5 - a}{\sqrt{a} + 5}$$

$$4 < x < 5 \quad (2) \text{ لدينا}$$

$$2 < \sqrt{x} < \sqrt{5} \quad \text{إذن}$$

$$\text{أي أن } 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < \sqrt{x} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) < \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$$

