



الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

1. ترتيب ومقارنة :

(a) بصفة عامة :

مقارنة عددين تعني البحث عن أكبرهما

لمقارنة عددين نعتمد على الفرق ، حيث لدينا $(b \geq a) \Leftrightarrow (b - a \geq 0) \Leftrightarrow (a \leq b)$

مثال: a و b عددان غير منعدمان مختلفي الإشارة $(a+b)^2$ و $a^2 + b^2$

لدينا $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ وبالتالي $(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ نستنتج أن $(a+b)^2 \geq (a^2 + b^2)$: $2ab \geq 0$

(b) مقارنة الكسور الموجبة:

نذكر بالقواعد التالية الخاصة بكسرين بسطيهما ومقاميهما موجبان:

$$\frac{2}{17} \leq \frac{13}{17}$$

• إذا كان لكسرين نفس المقام، فإن أكبرهما هو الذي له أكبر بسط :

$$\frac{17}{13} \leq \frac{17}{2}$$

• إذا كان لكسرين نفس البسط، فإن أكبرهما هو الذي له أصغر مقام :

• بصفة عامة لمقارنة كسرين أو أكثر، نوجد مقامات الكسور ثم نستعمل القاعدة الأولى:

لمقارنة الكسور $\frac{5}{6}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{2}{3}$ نوجد المقامات أولا ، لدينا : $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$; $\frac{13}{18} = \frac{13}{18}$; $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ حسب القاعدة

الأولى لدينا $\frac{12}{18} \leq \frac{13}{18} \leq \frac{15}{18}$ نستنتج بالتالي أن : $\frac{2}{3} \leq \frac{13}{18} \leq \frac{5}{6}$

(c) مقارنة الكسور مع العدد 1:

نذكر بالقواعد التالية:

$$\frac{17}{17} = 1$$

• إذا كان البسط يساوي المقام فإن الكسر يساوي 1 :

$$1 \leq \frac{23}{17}$$

• وإذا كان البسط أكبر من المقام فإن الكسر أكبر من 1 :

$$\frac{15}{17} \leq 1$$

• وإذا كان البسط أصغر من المقام فإن الكسر أصغر من 1 .

(d) مقارنة أعداد يحتوي بعضها على جذور الموجبة:

• في الحالات البسيطة غالبا ما نلتجئ إلى مقارنة المربعات وفق إحدى القاعدتين :

$$(0 \leq x^2 \leq y^2) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq y) \text{ أو } (0 \leq x \leq y) \Leftrightarrow (0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y})$$

لمقارنة الأعداد $5\sqrt{3}$; $7\sqrt{2}$; 9 نحسب المربعات : $9^2 = 81$; $(7\sqrt{2})^2 = 98$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$

لدينا $75 \leq 81 \leq 98$ ، نستنتج بالتالي أن : $5\sqrt{3} \leq 9 \leq 7\sqrt{2}$

• لكن اللجوء الى المربعات من البداية لا يمكن من المقارنة بل ربما يزيد الأمور تعقيدا . في هذه الحالة يمكن الاستعانة بالفرق في البداية ثم مقارنة المربعات بعد التأكد من أن الأعداد التي نريد مقارنتها موجبة:

لمقارنة العددين $b = 5\sqrt{3} - 7$; $a = 7\sqrt{3} + 11$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

لدينا العدد $0 \leq a$ لأنه مجموع عددين موجبين. أما العدد b فهو على شكل فرق عددين ، لدينا :

$7^2 = 49$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$ ، بما أن $75 \geq 49$ فإن $5\sqrt{3} \geq 7$ وبالتالي $b = 5\sqrt{3} - 7 \geq 0$

نستنتج في النهاية أن : $0 \leq a$ و $0 \leq b$

حساب المربعات سوف لن يؤدي إلا الى تعقيد الحساب دون التوصل الى مقارنة العددين ولكم أن تجربوا ذلك بأنفسكم.

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} + 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} + 18 \geq 0$. ومنه $a \geq b$.

لمقارنة العددين $b = 5\sqrt{3} - 7$; $a = 7\sqrt{3} - 11$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

نتأكد بنفس الطريقة السابقة أن : $0 \leq a$ و $0 \leq b$

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} - 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} - 4$. لدينا :

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

$2\sqrt{3} - 4 \geq 0$ وبالتالي $2\sqrt{3} \geq 4$ فإن $12 \geq 16$ ، بما أن $(2\sqrt{3})^2 = 12$; $4^2 = 16$
ومنه نستنتج أن $a \geq b$

2. الترتيب والعمليات : نعرض في الجدول التالي أهم القواعد المستعملة في المقارنة

عملية	Domaine	Propriété
الجمع	$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$;	$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$;
الضرب في الأعداد الموجبة	$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall c \geq 0; \forall d \geq 0$;	$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$
الضرب في عدد واحد	$\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall c \geq 0$; $\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall c \leq 0$;	$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$ $a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times d$
المقابل	$\forall a, b \in \mathbb{R}$;	$a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$
مقلوب الأعداد الموجبة	$\forall a \neq 0 ; \forall b \neq 0$;	$0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

قواعد الجذور المربعة

$$\sqrt{a^2} = a \text{ (pour } a \geq 0 \text{)} ; \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \text{ (pour } a \geq 0, b \geq 0 \text{)}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (pour } a \geq 0, b \geq 0 \text{)}$$

Attention!!....

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} ; \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

قواعد القوى

$$a^0 = 1 \text{ (pour } a \neq 0 \text{)} ; a^0 = a ; a^2 = a \times a$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} ; (a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n ; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Attention!!.... ne pas confondre avec les identités

$$a^n + b^n \neq (a+b)^n ; a^n - b^n \neq (a-b)^n$$

Puissances et racines	$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$;	$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq a^n \leq b^n$ $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$	القوى والجذور
-----------------------	--	--	---------------

قواعد القيم المطلقة

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} ; |x \times y| = |x| \times |y| ; \begin{cases} |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0 \\ |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases} ; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$||x| + |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y| ; \begin{cases} |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[\\ |x| > r \Leftrightarrow (x < -r \text{ ou } x > r) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[\end{cases}$$

قيمة مقربة :

نقول أن العدد x هو قيمة مقربة للعدد x إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$x \in]A-r, A+r[\text{ أي } A-r < x < A+r \text{ أي } |x-A| < r$$