

ج م ع	الحساب - الترتيب في IR ملخص الدرس	ح. بوعيون
-------	--------------------------------------	-----------

(4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a \in \mathbb{R}^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $b^2 = a$. ونكتب $\sqrt{a} = b$.

خاصيات .

(a) ليكن a و b من $\mathbb{R}^+$.

$$(\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a) \quad (*) \quad \sqrt{a} \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} \quad (*) \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (*)$$

$$(\sqrt{x^2} = |x|) \quad (*) \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \text{ إذا كان } ab > 0 \text{ فإن : } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \text{ و } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(d) \text{ ليكن } a \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 = a \text{ يكافئ } x = \sqrt{a} \text{ أو } x = -\sqrt{a}$$

(5) التناسبية .

(a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(b) \text{ إذا كان : } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ فإن :}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n}$$

(6) الجزئ الصحيح .

(a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسببيين متتابعين k و $k+1$ يعني : $k \leq x < k+1$

العدد النسبي k يسمى الجزئ الصحيح للعدد x ونكتب $E(x) = k$ أو

$$[x] = k$$

ملاحظة :

(*) الجزئ الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

$$(*) \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

(II) الترتيب في IR .

(1) خاصيات

$$(a) \quad a \geq b \text{ يكافئ } a - b \geq 0$$

$$(*) \quad a \leq b \text{ يكافئ } a - b \leq 0$$

$$(b) \quad a > b \text{ يكافئ } a - b > 0$$

$$(*) \quad a < b \text{ يكافئ } a - b < 0$$

$$(c) \quad a \leq b \text{ يعني } a < b \text{ أو } a = b$$

(*) إذا كان $a < b$ فإن $a \leq b$ والعكس غير صحيح .

$$(d) \quad a \geq b \text{ يكافئ } a + c \geq b + c$$

$$(*) \quad a > b \text{ يكافئ } a + c > b + c$$

$$(e) \quad (*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \text{ فإن } a \leq c$$

الحساب في IR .

(1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من $\mathbb{R}$.

$$(a) \quad a = b \text{ يكافئ } a + c = b + c$$

$$(b) \quad a = b \text{ يكافئ } ac = bc \quad (c \neq 0)$$

$$(c) \text{ إذا كان } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} a + c = b + d \\ ac = bd \end{cases}$$

$$(d) \quad ab = 0 \text{ يكافئ } a = 0 \text{ أو } b = 0$$

$$(e) \quad ab \neq 0 \text{ يكافئ } a \neq 0 \text{ و } b \neq 0$$

$$(g) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ يكافئ } ad = bc \quad (a \neq 0 \text{ و } b \neq 0)$$

$$(h) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ و } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$(i) \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ و } \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \text{ و } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

(2) القوى في IR

$$(a) \text{ تعريف } a^1 = 1 \quad (*) \quad (a \neq 0) \quad a^0 = 1 \quad (*)$$

$$(*) \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}} \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$$

$$(*) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(b) خاصيات

(a) ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ و m و n من $\mathbb{Z}$.

$$(*) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (*) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(*) \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (*) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(*) \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (*) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(b) \text{ إذا كان } a = b \text{ فإن } a^2 = b^2$$

$$(c) \text{ إذا كان } a^2 = b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a = b$$

$$(d) \quad a^2 = b^2 \text{ يكافئ } a = b \text{ أو } a = -b$$

ملاحظة لكي نبين أن : $a = b$ يكفي مثلا أن نبي أن

$$a^2 = b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة}$$

(3) متطابقات هامة

$$(a) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(b) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(c) \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(d) \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(e) \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(f) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(g) \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

(3) المجالات

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \quad (a)$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} \quad (a)$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} \quad (a)$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} \quad (a)$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} \quad (a)$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \quad (a)$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\} \quad (a)$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\} \quad (a)$$

(4) التآطير

تعريف: كل متفاوتة من المتفاوتات : $a < x < b$ و $a \leq x < b$ و $a < x \leq b$ و $a \leq x \leq b$ تسمى تآطيرا للعدد x سعته $b - a$.

(5) القيمة المقربة

(i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتقريب للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد

$$0 \leq x - x_0 \leq r$$

(ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد

$$-r \leq x - x_0 \leq 0$$

(iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد

$$-r \leq x - x_0 \leq r$$

$$|x - x_0| \leq r$$

(b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد

$$a \leq x \leq b$$

(i) a هي القيمة المقربة بتقريب للعدد x بالدقة $r = b - a$

(ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r = b - a$

(iii) $\frac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r = \frac{b-a}{2}$

(c) ملاحظة

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التآطيرات التالية :

(i) $0 \leq x - x_0 \leq r$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتقريب للعدد x بالدقة r

(ii) $-r \leq x - x_0 \leq 0$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

(iii) $-r \leq x - x_0 \leq r$ أو $|x - x_0| \leq r$ وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

(d) التقريب العشري

ليكن x من $\mathbb{R}$.

(i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتقريب للعدد x بالدقة 10^{-n} .

(i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n} + 1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

$$(*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ b < c \end{cases} \text{ فإن } a < c.$$

$$(f) (*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \text{ فإن } a + c \leq b + d \text{ والعكس غير صحيح.}$$

$$(*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c < d \end{cases} \text{ فإن } a + c < b + d$$

$$(g) (*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \geq 0 \end{cases} \text{ فإن } ac \leq bc$$

$$(*) \text{ إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq 0 \end{cases} \text{ فإن } ac \geq bc$$

$$(f) (*) \text{ إذا كان } \begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \text{ فإن } ac \leq bd \text{ والعكس غير صحيح.}$$

$$(*) \text{ إذا كان } \begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 < c < d \end{cases} \text{ فإن } ac < bd$$

$$(i) \text{ ليكن } a > 0 \text{ و } b > 0 \text{ . } (*) \text{ } a \leq b \text{ يكافئ } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$(j) \text{ ليكن } a < 0 \text{ و } b < 0 \text{ . } (*) \text{ } a \leq b \text{ يكافئ } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$(k) \text{ ليكن } a \geq 0 \text{ و } b \geq 0 \text{ . } (*) \text{ } a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2$$

$$(l) \text{ ليكن } a \leq 0 \text{ و } b \leq 0 \text{ . } (*) \text{ } a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \geq b^2$$

$$(m) \text{ ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{R} \text{ . } (*) \text{ } |a| \leq |b| \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2$$

(n) إذا كان a و b نفس الإشارة و $a + b = 0$ فإن $a = 0$ و $b = 0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين (k) و (l).

(2) القيمة المطلقة

تعريف: ليكن x من $\mathbb{R}$. القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

بمعنى : (*) إذا كان $x \geq 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .

(*) إذا كان $x \leq 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيات

$$(*) \text{ (a) } |x| \geq 0 \quad | -x | = | x |$$

$$(*) \text{ (b) } |xy| = |x| |y| \quad (*) \text{ (c) } |x^n| = |x|^n \quad (*) \text{ (d) } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$(*) \text{ (e) } |x| = r \text{ يكافئ } x = r \text{ أو } x = -r$$

$$(*) \text{ (f) } |x| = |y| \text{ يكافئ } x = y \text{ أو } x = -y$$

$$(*) \text{ (g) } |x| \leq r \text{ يكافئ } -r \leq x \leq r$$

$$(*) \text{ (h) } |x| \geq r \text{ يكافئ } x \leq -r \text{ أو } x \geq r$$