

الجبر



مذكرة رقم 5 : الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الترتيب والعمليات؛ - القيمة المطلقة وخاصيتها؛ - المجالات؛ - التأطير والتقريب، التقريبات العشرية.	- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة؛ - تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي؛ - إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.	- إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض الأعداد وفي إثبات بعض العلاقات يعتبر من المهارات التي ينبغي الحرص على تلمينها وتثبيتها، كما أن تأويل علاقات من الشكل $x - a \leq r$ وإنجاز بعض الإكبارات باستعمال المتفاوتات المثلثية وخاصيات القيمة المطلقة، من التقنيات الأساسية التي ينبغي تلمين التلاميذ على استعمالها بشكل تدريجي. - ينبغي ربط مفهوم القيمة المطلقة بالمسافة بين نقطتين على مستقيم مدرج. - يمكن تقديم الخصائص المتعلقة بتأطير وتقريب مجموع عددين أو فرق عددين في الحالة العامة أما تأطير وتقريب جداء وخارج عددين حقيقيين فينبغي دراستها من خلال أمثلة عددية مختارة تبين للتلاميذ الاحتياطات التي ينبغي اتخاذها وشروط صحة الاستدلالات. - تعتبر الآلة الحاسبة أداة مساعدة في تناول المفاهيم السابقة (التأطير والتقريب...) غير أنه ينبغي التحقق من أن التلاميذ ملمون بالكتابة العلمية لعدد ومذكرون أن الآلة الحاسبة تعطي في أغلب الأحيان تقريبا عشريا للنتيجة، لذا ينبغي إكساب التلاميذ التقنيات الخاصة بالآلة الحاسبة العلمية (الألويات في العمليات، وظائف الملامس...)

I. الترتيب والعمليات:

(1) تعاريف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b ونكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b ونكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

3. نقول إن a أصغر قطعاً من b ونكتب $a < b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

4. نقول إن a أكبر قطعاً من b ونكتب $a > b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة : a و b عدنان حقيقيان.

• $a \leq b$ يكافئ $a < b$ أو $a = b$

• مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية:

$a = b$, $a > b$, $a < b$

أمثلة: $3 < \sqrt{5}$, $-\frac{1}{3} < -7$, $2,14 < \pi$

مثال : قارن بين $\frac{100}{101}$ و $\frac{101}{102}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$

اذن : $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+$ ومنه $\frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$

تمرين 1: قارن a و b ونضع $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$, وبما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً

أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فان: $a > b$

تمرين 2: $a \in \mathbb{R}$ قارن $2a$ و $a^2 + 1$

الجواب : $(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن $a \in \mathbb{R}$

(2) خاصيات : لتكن a و b و c أعداداً حقيقية.

خاصية: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة : إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فان $a < c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة a مع نفس العدد b .

مثال : لدينا : $1 < \frac{30}{31}$ و $\frac{114,01}{114} < 1$ ومنه فان: $\frac{30}{31} < \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب والجمع:

$a \leq b$ يكافئ $a + c \leq b + c$

■ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فان $a + c \leq b + d$

■ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فان $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب والضرب:

■ إذا كان $c > 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$

■ إذا كان $c < 0$ فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

■ إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فان $0 \leq ac \leq bd$

■ إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب والمقلوب:

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة ($ab > 0$)

$a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فان $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب والمربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$ و $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

لكل $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\leq$ بأحد الرموز: $\geq$ أو $<$ أو $>$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

تمرين 3: قارن العددين: $a = \sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$

الجواب: نحسب الفرق :

$a - b = \sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} \times 2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$

2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ و $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

الجواب: (1) x عنصرا من $\mathbb{R}^+$ يعني $x \geq 0$

لدينا $x+2 \geq x$ لأن: $(x+2) - x \geq 0$

اذن: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+1}$ و إضافة $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$ نجد النتيجة المطلوبة:

أي أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

(2) الاستنتاج:

بضربنا في المرافق نجد المتساوية التالية:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

أي أن:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2 - x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

وبما أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

اذن نستنتج أن: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

تمرين 8: ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x} - 1$.

$$\text{الجواب: } x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

ومنه $x \geq (2\sqrt{x} - 1)$ مهما يكن $x \in \mathbb{R}^+$

تمرين 9: ليكن n عددا صحيحا طبعيا.

نضع: $a = \sqrt{4n^2 + 1}$ و $b = 2n + 1$ قارن العددين a و b .

الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$$a^2 = (\sqrt{4n^2 + 1})^2 = 4n^2 + 1$$

$$b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1 = 4n$$

$$b^2 - a^2 = 4n \geq 0$$

ومنه $b^2 \geq a^2$ اذن نستنتج أن $b \geq a$ مهما يكن $x \in \mathbb{N}$

تمرين 10: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x < y < 3$

1. بين أن: $x + y - 6 < 0$

2. قارن العددين $a = x^2 - 6x + 1$ و $b = y^2 - 6y + 1$

الجواب:

(1) لدينا $x < y < 3$ اذن $x < 3$ و $y < 3$ ومنه $x + y < 6$

وبالتالي: $x + y - 6 < 0$

(2) نحسب الفرق: $a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$

$$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$$

$$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$$

لدينا $x < y$ اذن $x - y \in \mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

ومنه $(x - y)(x + y - 6) \in \mathbb{R}^+$ أي: $a - b \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي $a \geq b$

$$\sqrt{3} \quad a - b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \quad \text{التعميل ب } (\sqrt{2} - 1)$$

لدينا: $\sqrt{2} > 1$ لأن: $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$

ولدينا: $\sqrt{3} > 1$ لأن: $(\sqrt{3})^2 = 3$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$

ومنه: $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$ وبالتالي: $a > b$

تمرين 4: قارن العددين: $a = \sqrt{10}$ و $b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$

الجواب: نحسب الفرق:

$$a - b = \sqrt{10} - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{5} \times 2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = \sqrt{5} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{5}(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \quad \text{التعميل ب } (\sqrt{2} - 1)$$

لدينا: $\sqrt{2} > 1$ لأن: $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$

ولدينا: $\sqrt{5} > 1$ لأن: $(\sqrt{5})^2 = 5$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$

ومنه: $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$ وبالتالي: $a > b$

تمرين 5: قارن العددين: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$$\text{الجواب: } \text{نحسب الفرق: } \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+2 - (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}) - ((\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا: $3\sqrt{3} > 5$ لأن: $(3\sqrt{3})^2 = 27$ و $(5)^2 = 25$ ومنه

$$3\sqrt{3} - 5 \in \mathbb{R}^{**}$$

ومنه: $\frac{3\sqrt{3}-5}{2} \in \mathbb{R}^{**}$ وبالتالي: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

تمرين 6: ليكن a و b عنصريين من $\mathbb{R}_+^*$.

نضع: $x = \frac{7a+2b}{7a}$ و $y = \frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .

$$\text{الجواب: } \text{نحسب الفرق: } x - y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x - y = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 14ab + 4b^2 - 56a \times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{49a^2 - 28a \times b + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{لأن: } x - y = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

وبالتالي: $x \geq y$

تمرين 7: ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ و $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

(1) المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$.
ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.
المجالات المحدودة

المجال	المتفاوتة
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$]a, b]$	$a < x \leq b$
$[a, b[$	$a \leq x < b$
$]a, b[$	$a < x < b$

المجالات غير المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$]b, +\infty[$	$x > b$
$[b, +\infty[$	$x \geq b$
$] -\infty, a]$	$x \leq a$
$] -\infty, a[$	$x < a$

مصطلحات: الرمز $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

• $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.

• $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو "القطعة a, b "

• $]a, b[$ يقرأ "المجال المفتوح a, b "

• $]a, +\infty[$ يقرأ "المجال a زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ و $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[$

تمرين 11: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

(1) $I =]-3, 7]$ و $J = [-1, +\infty[$

(2) $I =]-\infty, 5[$ و $J = [4, 10]$

(3) $I = [0, 10[$ و $J = [-5, -1]$

(4) $I = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$ و $J = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$

الجواب:

(1) $I \cup J =]-3, +\infty[$ و $I \cap J =]-1, 7]$

(2) $I \cup J =]-\infty, 10]$ و $I \cap J = [4, 5[$

(3) $I \cup J = [-5, 10]$ و $I \cap J = \emptyset$

(4) $I \cup J = \left]-1, 2\right]$ و $I \cap J = \left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right[$

تمرين 12: حل في IR النظم الآتية

(1) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$

الجواب: الرمز يعني التقاطع

(1) $x > 5$ يعني $x \in]5, +\infty[$

$x \leq 4$ يعني $x \in]-\infty, 4]$

$S =]5, +\infty[\cap]-\infty, 4] = \emptyset$

(2) $x \geq -3$ يعني $x \in [-3, +\infty[$

$x > 2$ يعني $x \in]2, +\infty[$

$S =]2, +\infty[\cap [-3, +\infty[=]2, +\infty[$

(3) $x > 7$ يعني $x \in]7, +\infty[$

$x \geq 0$ يعني $x \in [0, +\infty[$

$S =]7, +\infty[\cap [0, +\infty[=]7, +\infty[$

(4) $x < 10$ يعني $x \in]-\infty, 10[$

$-3 \leq x \leq 0$ يعني $x \in [-3, 0]$

$S =]-\infty, 10[\cap [-3, 0] = [-3, 0]$

(2) تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a < b$

بحيث: $a \leq x \leq b$ أو $a < x < b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعاً $b - a$ يسمى سعة التأطير و العددين a و b هما محددات التأطير.

تمرين 13: نضع $x \in [1, 3]$ و $y \in [2, 4]$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$

و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

(2) حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

الجواب (1): $x \in [1, 3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$y \in [2, 4]$ يعني $2 \leq y \leq 4$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$ يعني $1 \leq x^2 \leq 9$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $2^2 \leq y^2 \leq 4^2$ يعني $4 \leq y^2 \leq 16$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3$ يعني $2 \leq 2x \leq 6$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $3 \times 2 \leq 3y \leq 3 \times 4$ يعني $6 \leq 3y \leq 12$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ اذن: $1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2}$ اذن: $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

(2) تأطير A : $6 \leq 3y \leq 12$ يعني $-12 \leq -3y \leq -6$

وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$

وبالتالي: $-5 \leq A \leq 25$

وسعة التأطير هي: $r = 25 - (-5) = 30$

تأطير B : $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq 2x \leq 6$ يعني $2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$

يعني $1 \leq 2x-1 \leq 5$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq x+1 \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \leq 2x-1 \leq 5$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ طرف

لطرف نجد

$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2}$ يعني $1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$

وسعة التأطير هي: $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

تمرين 14 : التاثير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:

(1) لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$ ومنه $14^2 < 200 < 15^2$ إذن نستنتج أن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

إذن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$

أي: $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$

إذن نستنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

(2) لدينا $22^2 = 484$ و $23^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$

لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ إذن نستنتج أن: $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

إذن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$

أي: $22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$

إذن نستنتج أن: $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

(3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

إذن: $1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$ أي:

$3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$

أي: $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

(1) القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

1. إذا كان $x \geq 0$ فإن: $|x| = x$

2. إذا كان $x \leq 0$ فإن: $|x| = -x$

أمثلة: $|3| = 3$ و $|\frac{3}{5}| = \frac{3}{5}$ و $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$

$|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4$ و $|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$

تمرين 15 : القيمة المطلقة لعدد حقيقي

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

(1) $|\sqrt{2} - 2|$ (2) $|3 - 2\sqrt{3}|$ (3) $|\sqrt{5} - \sqrt{2}|$

(4) $A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$

الجواب:

(1) لدينا $\sqrt{2} < 2$ إذن: $\sqrt{2} - 2 \in \mathbb{R}^-$ ومنه

$|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = -\sqrt{2} + 2$

(2) لدينا $3 < 2\sqrt{3}$ لأن: $3^2 < (2\sqrt{3})^2$

إذن: $3 - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ ومنه $|3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$

(3) لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ إذن: $\sqrt{5} - \sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ ومنه

$|\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

(4) $A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$

$A = 4 - 2\sqrt{3} - (-5 + 3\sqrt{3}) + (9 - 5\sqrt{3})$

$A = 4 - 2\sqrt{3} - (-5 - 3\sqrt{3}) + (5\sqrt{3} - 9)$

$A = 4 - 2\sqrt{3} + 5 - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 9 = 0$

(2) خاصيات:

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $|x|^2 = x^2$ و $|x| \leq x \leq |x|$.

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$.

• لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$, $|x+y| \leq |x| + |y|$

• إذا كان $y \neq 0$ فإن: $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$.

• لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.

• لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

تمرين 16:

1. أحسب: $(3\sqrt{2} - 5)^2$

2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5

3. بسط: $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

(الجواب: 1) $(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25$

$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 43 - 30\sqrt{2}$

(2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $5^2 = 25$

إذن $3\sqrt{2} < 5$ ومنه $3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$

(3) $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} = |3\sqrt{2} - 5|$

لأن $3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$: $-(3\sqrt{2} - 5)$

وبالتالي: $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} + 5$

خاصية: ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+$.

• $|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$

• $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$

تطبيقات: (حل المعادلات)

تمرين 17: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (1) $|x - 1| = 5$

(2) $|x + 2| = -1$ (3) $|2x + 1| = |x - 3|$

(الجواب: 1) $|x - 1| = 5$ يعني $x - 1 = 5$ أو $x - 1 = -5$

يعني $x = 6$ أو $x = -4$ إذن: $S = \{-4; 6\}$

(2) المعادلة: $|x + 2| = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن القيمة المطلقة دائما موجبة

إذن: $S = \emptyset$

(3) $|2x + 1| = |x - 3|$ يعني $2x + 1 = x - 3$ أو $2x + 1 = -(x - 3)$

يعني $x = -4$ أو $2x + 1 = -x + 3$ يعني $x = -4$ أو $x = \frac{2}{3}$

إذن: $S = \left\{-4; \frac{2}{3}\right\}$

تطبيقات: (حل المتراجحات)

تمرين 18: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: (1) $|x - 1| \leq 2$

(2) $|x + 2| \geq 3$ (3) $|2x + 1| < 6$

(الجواب: 1) $|x - 1| \leq 2$ يعني $-2 \leq x - 1 \leq 2$ يعني

$-1 \leq x \leq 3$ يعني $S = [-1; 3]$

(2) $|x + 2| \geq 3$ يعني $x + 2 \geq 3$ أو $x + 2 \leq -3$

يعني $x \geq 1$ أو $x \leq -5$ يعني $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$

(3) $|2x + 1| < 6$ يعني $-6 < 2x + 1 < 6$ يعني

$-6 - 1 < 2x + 1 - 1 < 6 - 1$ يعني $-7 < 2x < 5$ يعني $-\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$

العدد $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a, b]$ و العدد $c = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a, b]$.

ومنه $x \in [a, b]$ يكافئ $|x - c| \leq r$ يكافئ $c - r \leq x \leq c + r$.

مثال: من أجل المجال $[-2, 10]$ لدينا: العدد $12 = (-2) - 10$ هو طوله

والعدد $c = \frac{10-2}{2} = 4$ هو مركزه و العدد $r = \frac{12}{2} = 6$ هو شعاعه

إذن: $x \in [-2, 10]$ يكافئ $|x - 4| \leq 6$.

IV. التقريبات والتقريب العشري:

(1) **التقريبات: تعريف:** ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعيا.

1. إذا كان $a \leq x \leq a + r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتقريب.

2. إذا كان $a - r \leq x \leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.

3. إذا كان $|x - a| \leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r .

خاصية: إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فان:

• العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بتقريب. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بإفراط.

• العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال 1: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

o العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

o العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

o العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

مثال 2: لدينا $\pi = 3,1415926 \dots$

سؤال: حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتقريب و بإفراط

تمرين 20: التقريب العشري لعدد

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب (استعمل المحسبة).

$$(\sqrt{10} \approx 3.16227766)$$

الجواب: $3.162 < \sqrt{10} < 3.163$

ولدينا: $3.163 - 3.162 = 0.001 = 10^{-3}$ إذن

• العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

• العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

(2) التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$$E(x) = p, p \leq x < p+1$$

مثال: لدينا: $1 \leq \sqrt{2} < 2$ و منه فإن $E(\sqrt{2}) = 1$

تمرين 21 أو مثال: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4}

بتقريب (استعمل المحسبة). علما أن: $(\sqrt{3} \approx 1.732050808 \dots)$

الجواب: لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$

أي $(1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} < (1732+1) \cdot 10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

يعني $-7 < 2x < 5$ يعني $-7 \times \frac{1}{2} < 2x < 5 \times \frac{1}{2}$

يعني $-\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$ إذن: $s =]-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}[$

تمرين 19: توظيف القيمة المطلقة

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x \geq \frac{1}{2}$ و $y \leq 1$ و $x - y = 3$.

1. أحسب قيمة العدد E حيث: $E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$

2. بين أن: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ و أن $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

3. أحسب قيمة العدد F حيث: $F = |x+y-5| + |x+y+2|$

الجواب: (1) $E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$

لدينا $x \geq \frac{1}{2}$ يعني $2x \geq 1$ يعني $2x-1 \geq 0$

ولدينا $y \leq 1$ يعني $2y \leq 2$ يعني $2y-2 \leq 0$

ومنه: $E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2) = 2x-2y+1 = 2(x-y)+1$

ونعلم أن: $x - y = 3$ ونعلم أن: $E = 2x - 2y + 1 = 2(3) + 1 = 7$

ومنه: $E = 2 \times 3 + 1 = 7$

(2) نبين أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

نعلم أن: $x - y = 3$ إذن: $x = y + 3$

ولدينا $x \geq \frac{1}{2}$ إذن: $y + 3 \geq \frac{1}{2}$ إذن: $y \geq \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

إذن: $y \geq -\frac{5}{2}$ وبما أن $y \leq 1$ فإن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

- نبين أن: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

نعلم أن: $x - y = 3$ إذن: $x = y + 3$

ووجدنا سابقا أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

إذن: $x - 3 \leq 1 + 3 = 4$ يعني $x \leq 4$

ومنه: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

(3) حساب قيمة العدد F حيث: $F = |x+y-5| + |x+y+2|$

نبحث عن إشارة $x+y-5$

ووجدنا سابقا أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$ و أن $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

إذن: $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \leq x+y \leq 1+4 = 5$ يعني $-2 \leq x+y \leq 5$

يعني $-5 \leq x+y-5 \leq 0$ يعني $-7 \leq x+y-5 \leq 0$

أي أن: $x+y-5$ سالب

نبحث عن إشارة $x+y+2$

وجدنا سابقا أن: $-2 \leq x+y \leq 5$

يعني $0 \leq x+y+2 \leq 7$ يعني $-2+2 \leq x+y+2 \leq 5+2 = 7$

أي أن: $x+y+2$ موجب

إذن: $F = |x+y-5| + |x+y+2| = -(x+y-5) + x+y+2 = -x-y+5+x+y+2 = 7$

إذن: $F = -x-y+5+x+y+2 = 7$

تعريف أخرى: ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a < b$

$a - b$ تسمى طول أو سعة المجال $[a, b]$.