الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	**درس** ***الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية***	مستوى الدراسي: TCS - TCT

I. الترتيب و العمليات:

تعاريف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \leq b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \geq b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b , و نكتب $a \prec b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b , و نكتب $a \succ b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة : a و b عددان حقيقيان.

- $a \leq b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- إذا كان $a \prec b$ فان $a \leq b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b \ , \ a \succ b \ , \ a = b$

أمثلة: $3 \prec \sqrt{5}$, $-\frac{1}{3} \prec -7$, $\pi \succ 2{,}14$

مثال 1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

مثال 2 : قارن : a و b و نضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

لدينا $a-b = 2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فان: $a \succ b$

مثال 3 : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

خاصيات : لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة : إذا كان $a \leq b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نقس العدد b.

مثال : لدينا : $1 \prec \frac{30}{31}$ و $\frac{114{,}01}{114} \prec 1$ و منه فان: $\frac{114{,}01}{114} \prec \frac{30}{31}$

خاصية الترتيب و الجمع:

$a \le b$ يكافئ $a+c \le b+c$

- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فان $a+c \le b+d$
- إذا كان $a \ge 0$ و $b \ge 0$ فان $a+b \ge 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$
- إذا كان $0 \le a \le b$ و $0 \le c \le d$ فان $0 \le ac \le bd$
- إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ فان $a+b \le 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$ $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$

إذا كان $a \le b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$ و $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$ و لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \ge 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الر موز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

II. المجالات و التأطير:

المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة:

لمجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات:

الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ و $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$

تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a \prec b$ بحيث: $a \le x \le b$ أو $a \le x \prec b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \prec x \prec b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير و العددان a و b هما محدات التأطير.

مثال: نضع $x \in [1;2]$ و $y \in [2;5]$ اعط تأطيرا للعددين التاليين وحدد سعتهما : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $A = \frac{2x-1}{x+1}$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف : ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة ذات الأفصول x من المستقيم العددي.

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM . و نكتب: $OM = |x|$

العلاقة بين إشارة x و القيمة المطلقة:

1. إذا كان $x \ge 0$ فان $OM = x$ و منه فان: $|x| = x$
2. إذا كان $x \le 0$ فان $OM = -x$ و منه فان: $|x| = -x$

مثال: $|3| = 3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$ و $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$

ملحوظة: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \leq x \leq |x|$.

خاصيات: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$.

- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$, $|x+y| \leq |x| + |y|$
- إذا كان $y \neq 0$ فإن: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

تطبيقات في القيمة المطلقة (حل المعادلات)

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $|x-1| = 5$ و $|x+2| = -1$ و $|2x+1| = |x-3|$

IV. المسافة و القيمة المطلقة:

تعريف : ليكن x و y عددين حقيقيين و المسافة بين العددين x و y هي العدد الحقيقي $|x-y|$.

خاصية : ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+^*$.

$|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$ و $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$

تطبيقات في القيمة المطلقة (حل المتراجحات)

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $|x-1| \leq 2$ و $|x+2| \geq 3$ و $|2x+1| < 6$

استنتاج : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a \prec b$

المسافة بين العددين a و b أي $|b-a| = b-a$ تسمى طول أو سعة المجال $[a,b]$.

العدد $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a,b]$ و العدد $c = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a,b]$.

و منه $x \in [a,b]$ يكافئ $|x-c| \leq r$ يكافئ $c-r \leq x \leq c+r$.

مثال: من أجل المجال $[-2,10]$ لدينا: العدد $10-(-2) = 12$ هو طوله و العدد $c = \frac{10-2}{2} = 4$ هو مركزه و العدد $r = \frac{12}{2} = 6$ هو شعاعه

إذن: $x \in [-2;10]$ يكافئ $|x-4| \leq 6$.

V. التقريبات والتقريبات العشرية:

التقريبات: تعاريف: ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1. إذا كان $a \leq x \leq a+r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
2. إذا كان $a-r \leq x \leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
3. إذا كان $|x-a| \leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r.

خاصية: إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فإن:

- العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط.
- العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال1: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

- العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط. و العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

مثال2: لدينا $3,1415926.....$ سؤال: حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتفريط و بإفراط

التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p \leq x \leq p+1$, p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x) = p$

مثال: لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$

مثال: لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} \prec 1,733$ أي $(1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} \prec (1732+1) \cdot 10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط. و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.