

المستوى : الجذع مشترك علمي
الأستاذ : عثمان نجيب

مادة الرياضيات

أكاديمية الجهة الشرقية
نيابة وجدة

ملزمة مطولة رقم 1

تمارين بحلول في درس مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية في الحسابيات
الأهداف القدرات المنتظرة من التمارين :

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- التعرف على مضاعفات و قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكير عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكير في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.
- توظيف الزوجية و تفكير عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

تمرين 1: من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية: 2, 5, $\sqrt{16}$, $\sqrt{2}$, 12-17, $\frac{11}{4}$, 11, -5, 2.

الجواب : 2 هو عدد صحيح طبيعي نكتب $2 \in \mathbb{N}$

-5 ليس بعدد صحيح طبيعي نكتب $-5 \notin \mathbb{N}$

$11 \in \mathbb{N}$ $\frac{11}{4} \notin \mathbb{N}$ $12-17 \notin \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$ $2.5 \notin \mathbb{N}$

تمرين 2: باستعمال الرموز: $\in, \subset, \not\subset, \not\in$ املا الفراغات التالية:

$9 \dots \mathbb{N}$ و $\frac{2}{3} \dots \mathbb{N}$ و $\sqrt{2} \dots \mathbb{N}$ و $\frac{8}{2} \dots \mathbb{N}$ و $-\frac{2}{3} \dots \mathbb{N}$ و $12-12 \dots \mathbb{N}^*$ و $\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5} \dots \mathbb{N}$ و $\sqrt{16} \dots \mathbb{N}$ و $2.12 \dots \mathbb{N}$ و $\pi \dots \mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{N}$ و $-\sqrt{100} \dots \mathbb{N}$ و $0 \dots \mathbb{N}^*$ و $\{1; 2; 7\} \dots \mathbb{N}$ و $\{4; -2; 12\} \dots \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^* \dots \mathbb{N}$

الجواب : $9 \notin \mathbb{N}$ $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ $\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ $12-12 \notin \mathbb{N}^*$ $\sqrt{25} \in \mathbb{N}$ $\frac{\sqrt{100}}{5} \in \mathbb{N}$ $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$ $2.12 \notin \mathbb{N}$ $\pi \notin \mathbb{N}$

$0 \notin \mathbb{N}^*$ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{N}$ $\{1; 2; 7\} \subset \mathbb{N}$ $\{4; -2; 12\} \not\subset \mathbb{N}$ $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$

تمرين 3: $a \in \mathbb{N}$ و $b \in \mathbb{N}$

(1) بين أنه إذا كان a عددا زوجيا و b عددا زوجيا فإن $a+b$ عدد زوجي

(2) بين أنه إذا كان a عددا فرديا و b عددا فرديا فإن $a+b$ عدد زوجي

(3) بين أنه إذا كان a عددا زوجيا فإن a^2 عدد زوجي

(4) بين أنه إذا كان a عددا فرديا فإن a^2 عدد فردي

(5) استنتج أنه إذا كان a^2 عدد فردي فإن a عدد فردي

الجواب (1): $a = 2k$ $k \in \mathbb{N}$ a عددا زوجي يعني :

و $b = 2k'$ $k' \in \mathbb{N}$ b عدد زوجي يعني :

اذن : $a+b = 2k+2k' = 2(k+k') = 2k''$ حيث $k+k' = k''$

ومنه $a+b$ عدد زوجي

(2) $a = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$ a عدد فردي يعني :

و $b = 2k'+1$ $k' \in \mathbb{N}$ b عددا فردي يعني :

اذن : $a+b = 2k+1+2k'+1 = 2(k+k')+2 = 2(k+k'+1) = 2k''$ حيث $k+k'+1 = k''$ ومنه $a+b$ عدد زوجي

(3) $a = 2k$ $k \in \mathbb{N}$ a عددا زوجي يعني :

اذن : $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2) = 2 \times k''$ حيث $2k^2 = k''$

ومنه a^2 عدد زوجي

(4) $a = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$ a عددا فردي يعني :

$$a^2 = (2k+1) = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$k^2 + 2k = k'' \text{ حيث } a^2 = 2(k^2 + 2k) + 1 = 2k'' + 1$$

ومنه a^2 عدد فردي

(5) a^2 عددا فردي

نفترض أن: a عدد زوجي إذن a^2 عدد زوجي ولكن حسب المعطيات a^2 عددا فردي إذن ما افترضناه خاطئ إذن: a عدد فردي

تمرين 4: حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 4

الجواب: لدينا مضاعفات العدد 4 تكتب على الشكل $4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

المضاعفات العشرة الأولى هي: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36

تمرين 5: حدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59

الجواب: لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث n من $\mathbb{N}$ والمحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 3×9 و 4×9 و

5×9 و 6×9 . أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.

وبالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.

تمرين 6:

• حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6

• حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9

• حدد أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9

الجواب: المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي 0 و 6 و 12 و 18 و

24 و 30 و 36 و 42 و 48 و 54

المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9 هي 0 و 9 و 18 و 27 و 36 و 45 و

54 و 63 و 72 و 81

18 هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9

ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و 9. و نرمز له بالرمز $PPCM(6,9)=18$

تمرين 7: نضع: $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ و $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$.

دون حساب x و y بين أن:

1. 75 قاسم للعدد y .

2. 105 قاسم للعدد x .

الجواب: لدينا $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$ أي أن: $y = 2 \times 75$ و منه فإن 75 قاسم للعدد y .

لدينا $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ أي أن: $x = 105 \times 12$

و منه فإن 105 قاسم للعدد x .

تمرين 8: حدد الرقم x لكي يكون العدد: $532x$ قابلا للقسمة على 9

الجواب: $0 \leq x \leq 9$ العدد: $532x$ قابلا للقسمة على 9

إذن: $5+3+x+2 = 10+x$ مضاعف للعدد 9 يعني $x+10$ مضاعف للعدد 9 إذن: $x=8$

تمرين 9: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

نضع $x = 2n+7$ و $y = 4n+2$.

1. بين أن x عدد فردي و y عدد زوجي.

2. بين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 3.

الجواب: لدينا $x = 2n+7$ أي أن: $x = 2(n+3)+1$

وبالتالي x عدد فردي لأن: $x = 2k+1$ حيث: $k = n+3$

ولدينا $y = 4n+2$ أي أن $y = 2(2n+1)$

وبالتالي y عدد زوجي لأن: $y = 2k$ حيث: $k = 2n+1$

ولدينا $x+y = 2n+7+4n+2 = 6n+9$ أي أن: $x+y = 3(2n+3)$

وبالتالي $x+y = 3(2n+3)$ إذن $x+y$ مضاعف للعدد 3.

تمرين 10:

(1) أدرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

(2) أدرس قابلية قسمة الأعداد: 120052005 و 1001001 و 79541 و 19350 و 3140 و 3752 و 3333426 و 145610 و 200070 على 3 و 9.

الجواب: (1) بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0 فإن 3611790 يقبل القسمة على 2 و 5.

العدد 90 لا يقبل القسمة على 4. وإذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.

مجموع أرقام العدد 3611790 هو 27. $27 = 0+9+7+1+1+6+3$ و 27 مضاعف للعدد 3. إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.

وبما أن 27 مضاعف للعدد 9 فإن 3611790 يقبل القسمة على 9.

هل العدد: 120052005 قابل للقسمة على 3؟ نعم مجموع أرقامه هو 15 إذن يقبل القسم على 3. بالمثل 1001001

هل الأعداد: 79541 و 3140 و 3752 قابلة للقسمة على 3؟ لا لأن مجموع الأرقام عدد لا يقبل القسم على 3

تمرين 11: فكك العدد 60 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج جميع قواسم العدد 60

الجواب: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ إذن القواسم هم : 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 10 و 12 و 15 و 30 و 60

تمرين 12: حدد جميع قواسم العدد 9 ثم حدد جميع قواسم العدد 16 ثم حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 و 61

الجواب: قواسم العدد 9 هم : 1 و 3 و 9 : قواسم العدد 16 هم : 1 و 2 و 4 و 8 و 16 إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 و 16 هو 1 و منه فإن 9 و 16 أوليين فيما بينهما

تمرين 13: حدد كل الأعداد الأولية الأصغر من 30 .

الجواب: الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

تمرين 14: هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.

و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين 15: حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 0 و 1 و 2 و 17 و 21 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001

الجواب: 0 ليس بعدد أولي لأن كل الأعداد تقسم 0 و 1 ليس بعدد أولي لأن له قاسم وحيد هو 1 و 2 عدد أولي لأن له قاسمين فقط

و 17 عدد أولي لأن له قاسمين فقط و 21 ليس بعدد أولي لأن : $21 = 3 \times 7$ و 41 عدد أولي لأن له قاسمين فقط و 87 ليس بعدد أولي لأن : $87 = 3 \times 29$ و 105 ليس بعدد أولي لأن : $105 = 3 \times 5 \times 7$

هل العدد 239 أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 239$ وهي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 239 إذن العدد 239 أولي

2787 ليس بعدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه 24)

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3. و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

هل العدد 191 أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 191$ وهي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 191 إذن العدد 191 أولي

تمرين 16: فكك الأعداد : 220 و 798 الى جداء عوامل أولية

حدد : $PGCD(220; 798)$ و $PPCM(220; 798)$

الجواب: $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$ $220 = 2^2 \times 5 \times 11$

إذن : $PGCD(220; 798) = 2^1 = 2$ و $PPCM(220; 798) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 = 87780$

تمرين 17: $n \in \mathbb{N}$ أدرس زوجية الأعداد التالية:

4516 $4 \times 51 + 1$ $2n + 4$ $4n^2 + 4n + 1$ $4n + 9$ $6n^2 + 12n$ $2n^2 + 7$ $3n^3 + n$

الجواب: $4516 = 2 \times 2258$ إذن $4516 = 2 \times k$ حيث : $k = 2258$

وبالتالي: 4516 عدد زوجي

$4 \times 51 + 1 = 2 \times 2 \times 51 + 1 = 2 \times k + 1$ إذن حيث: $k = 2 \times 51$

وبالتالي: $4 \times 51 + 1$ عدد فردي

$2n + 4 = 2(n + 2) = 2 \times k$ حيث: $k = n + 2$

وبالتالي: $2n + 4$ عدد زوجي

$4n + 9 = 2(2n + 4) + 1 = 2 \times k + 1$ حيث: $k = 2n + 4$

وبالتالي: $4n + 9$ عدد فردي

$4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2 \times k + 1$ حيث: $k = 2n^2 + 2n$

وبالتالي: $4n^2 + 4n + 1$ عدد فردي

$6n^2 + 12n = 2(3n^2 + 6n) = 2 \times k$ حيث: $k = 3n^2 + 6n$

وبالتالي: $6n^2 + 12n$ عدد زوجي

$2n^2 + 7 = 2(n^2 + 3) + 1 = 2k + 1 = 2 \times k$ حيث: $k = n^2 + 3$

وبالتالي: $2n^2 + 7$ عدد فردي

دراسة زوجية العدد: $3n^3 + n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

الحالة 1: n عدد زوجي

$n^3 = n \times n \times n$ هو أيضا عدد زوجي لأنه جداء أعداد زوجية

وبالتالي : $3n^3 + n$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين زوجيين

الحالة 2: n عدد فردي

$n^3 = n \times n \times n$ هو أيضا عدد فردي لأنه جداء أعداد فردية

وكذلك : $3n^3$ عدد فردي لأنه جداء عددين فرديين

و منه : $3n^3 + n$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين فرديين

وبالتالي: $3n^3 + n$ عدد زوجي كيفما كانت $n \in \mathbb{N}$

تمرين 18: فكك العدد 1344 الى جداء عوامل أولية

الجواب : $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

تمرين 19:

(1) فكك الأعداد : 220 و 798 و 5292 و 1650 الى جداء عوامل أولية

(2) حدد : $PGCD(220; 798)$ و $PPCM(220; 798)$

$PPCM(1650; 5292)$

الجواب (1): $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$
 $5292 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$ $1650 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 11^1$

$PGCD(220; 798) = 2^1 = 2$ $PPCM(220; 798) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 = 87780$
 $PPCM(1650; 5292) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 13097700$

تمرين 20 : نضع $a = 1530$ و $B = 612$

1. أحسب $PPCM(612; 1530)$ $PPCM(612; 1530)$

2. بسط العدد $\frac{a}{b}$

3. أكتب العدد $\sqrt{ab}$ على الشكل $m\sqrt{n}$ حيث m و n عنصران من $\mathbb{N}$

الجواب (1): $1530 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 17$ $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$

$PGCD(1530; 612) = 2^1 \times 3^2 \times 17 = 153$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{2^1 \times 3^2 \times 5 \times 17}{2^2 \times 3^2 \times 17} = \frac{5}{2}$

(3) $\sqrt{ab} = \sqrt{2^1 \times 3^2 \times 5 \times 2^2 \times 3^2 \times 17^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{17^2}$

$\sqrt{a^2} = a$ و $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ لأن $\sqrt{ab} = \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{5} \times 2 \times 3 \times 17 = 306 \times \sqrt{10}$

تمرين 21: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1. تأكد من أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية :

$n = 1$ و $n = 3$ و $n = 5$ و $n = 7$

2. بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 4 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

3. بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

4. استنتج أن : $n^4 - 1$ مضاعف للعدد 16

5. بين أنه اذا كان n و m عددين فرديين فان : $n^2 + m^2 + 6$ مضاعف للعدد 8

الجواب (1): $n = 1$ $n^2 - 1 = 0$ $n = 3$ $n^2 - 1 = 8$ $n = 5$ $n^2 - 1 = 24$ $n = 7$ $n^2 - 1 = 48$

$n = 3$: $n^2 - 1 = 8$ $n = 5$: $n^2 - 1 = 24$ $n = 7$: $n^2 - 1 = 48$

$n = 7$ $n^2 - 1 = 48$ $n = 9$ $n^2 - 1 = 80$

(2) n عدد فردي يعني : $n = 2k + 1$

$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + (1)^2 - 1$

$k' = k^2 + k$ $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k) = 4 \times k'$

ومنه $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 4 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

(3) وجدنا $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$

ولدينا $k(k + 1)$ هو جداء عددين متتابعين اذن هو عدد زوجي ومنه : $k(k + 1) = 2k'$

ومنه $n^2 - 1 = 4k'$ أي : $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8

(4) وجدنا $n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 1)$

ووجدنا $n^2 - 1 = 4k'$

ولدينا $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 4(k^2 + k + 1) = 4 \times k''$

اذن: $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (4k')(4k'') = 16k'''$

ومنه $n^4 - 1$ مضاعف للعدد 16

(5) وجدنا أن: $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 يعني: $n^2 - 1 = 8k$ أي: $n^2 = 8k + 1$

وبنفس الطريقة نبين: $m^2 - 1 = 8k'$ أي: $m^2 = 8k' + 1$ ومنه $n^2 + m^2 + 6 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 6 = 8k + 8k' + 8 = 8(k + k' + 1) = 8k''$

وبالتالي: $n^2 + m^2 + 6$ مضاعف للعدد 8

تمرين 22: $n \in \mathbb{N}$

(1) تأكد أن: $n^2 + 3n + 3 = (n+1)(n+2) + 1$

(2) استنتج زوجية العدد $n^2 + 3n + 3$

الجواب: (1) $(n+1)(n+2) + 1 = n^2 + 2n + n + 2 + 1 = n^2 + 3n + 3$

(2) وجدنا $n^2 + 3n + 3 = (n+1)(n+2) + 1$

ولدينا $(n+1)(n+2)$ هو جداء عددين متتابعين اذن هو عدد زوجي

أي: $(n+1)(n+2) = 2k$

ومنه $(n+1)(n+2) + 1$ هو عدد فردي لأنه مجموع عدد زوجي وفردي

وبالتالي $n^2 + 3n + 3$ عدد فردي

تمرين 23: أدرس زوجية الأعداد التالية حيث: $m \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

$375^2 + 648^2$ و $2n + 16$ و $10n + 5$ و $18n + 4m + 24$ و $8n^2 + 12nm + 3$ و $26n + 10m + 7$ و $n^2 + 13n + 17$ و $(n+1)^2 + 7n^2$ و $n^2 + 5n$ و $n^2 + 8n$ و $n^2 + n$ و $n^3 - n$ و $5n^2 + n$ و $4n^2 + 4n + 1$ و $n + (n+1) + (n+2)$

الجواب: (1) $375^2 + 648^2$

648^2 هو مربع عدد زوجي اذن هو عدد زوجي

375^2 هو مربع عدد فردي اذن هو عدد فردي

ونعلم أن مجموع عدد فردي وعدد زوجي هو عدد فردي اذن: $375^2 + 648^2$ عدد فردي

(2) $2n + 16 = 2(n + 8) = 2 \times k$ حيث: $k = n + 8$

وبالتالي: $2n + 4$ عدد زوجي

(3) $10n + 5 = 2(5n + 2) + 1 = 2 \times k + 1$ حيث: $k = 5n + 2$

وبالتالي: $2n + 16$ عدد فردي

(4) $18n + 4m + 24 = 2(9n + 2m + 12)$

اذن: $18n + 4m + 24 = 2k$

حيث: $k = 9n + 2m + 12$

وبالتالي: $18n + 4m + 24$ عدد زوجي

$6n^2 + 12n = 2(3n^2 + 6n) = 2 \times k = 2 \times k'$ حيث: $k = 3n^2 + 6n$

وبالتالي: $6n^2 + 12n$ عدد زوجي

$2n^2 + 7 = 2n^2 + 6 + 1 = 2(n^2 + 3) + 1 = 2k + 1$ حيث: $k = n^2 + 3$

وبالتالي: $2n^2 + 7$ عدد فردي

(5) $8n^2 + 12nm + 3 = 2(4n^2 + 4nm + 1) + 1 = 2k + 1$

وبالتالي: $8n^2 + 12nm + 3$ عدد فردي

(6) $26n + 10m + 7 = 2(13n + 5m + 3) + 1 = 2k + 1$

وبالتالي: $26n + 10m + 7$ عدد فردي

(7) $26n + 10m + 7 = 2(13n + 5m + 3) + 1 = 2k + 1$

وبالتالي: $26n + 10m + 7$ عدد فردي

(8) $n^2 + 13n + 17 = n(n+1) + 2(6n+8) + 1$

$n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي

$$n^2 + 13n + 17 = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$$

حيث: $k'' = k + k'$ و $k' = 6n + 8$

وبالتالي: $n^2 + 13n + 17$ عدد فردي

$$(n+1)^2 + 7n^2 = n^2 + 2n + 1 + 7n^2 = 8n^2 + 2n + 1 = 2(4n^2 + n) + 1 = 2k + 1 \quad (9)$$

حيث: $k = 4n^2 + n$ بالتالي: $(n+1)^2 + 7n^2$ عدد فردي

$$n^2 + 5n = n^2 + n + 4n = n(n+1) + 4n = 2k + 4n = 2(k + 2n) \quad (10)$$

لان $n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي

وبالتالي: $n^2 + 5n$ عدد زوجي

(11) دراسة زوجية العدد: $n^2 + 8n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

الحالة 1 : n عدد زوجي

$n^2 = n \times n$ هو أيضا عدد زوجي لأنه جداء أعداد زوجية

$$8n = 2 \times 4n = 2 \times k \quad \text{حيث: } k = 4n \quad \text{بالتالي: } 8n \text{ عدد زوجي}$$

وبالتالي: $n^2 + 8n$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين زوجيين

الحالة 2 : n عدد فردي

$n^2 = n \times n$ هو أيضا عدد فردي لأنه جداء أعداد فردية

$$8n = 2 \times 4n = 2 \times k \quad \text{حيث: } k = 4n \quad \text{بالتالي: } 8n \text{ عدد زوجي}$$

ومنه: $n^2 + 8n$ عدد فردي لأنه مجموع عدد زوجي وفردي

$$n^2 + n = n(n+1) \quad \text{هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي} \quad (12)$$

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n^2 - 1^2) = n(n-1)(n+1) \quad (13)$$

$$n^3 - n = (n-1) \times n \times (n+1)$$

هو جداء ثلاثة أعداد طبيعية متتالية اذن هو عدد زوجي

$$5n^2 + n = 4n^2 + n^2 + n = 4n^2 + n(n+1) = 2 \times 2n^2 + 2k = 2 \times (2n^2 + k) = 2 \times k' \quad (14)$$

$n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي

$$n^2 + 13n + 17 = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$$

حيث: $k'' = k + k'$ و $k' = 6n + 8$

وبالتالي: $n^2 + 13n + 17$ عدد فردي

$$4n^2 + 4n + 1 = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 = (2n+1)^2 \quad (15)$$

ونعلم أن مربع عدد فردي هو عدد فردي وبالتالي: $4n^2 + 4n + 1$ عدد فردي

تمرين 24: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ نضع: $a = 6n + 1$

$$b = 12n^2 + 2 \quad \text{و}$$

$$f = 3 \times 2^{n+1} + 5 \times 2^n \quad \text{و} \quad e = 2^{n+3} - 2^{n+1}$$

1. أدرس زوجية الأعداد: a و b

2. بين أن $a + b$ مضاعف للعدد 3

3. بين أن e مضاعف للعدد 3 وأن f مضاعف للعدد 11

4. فكك العددين e و f الى جداء عوامل أولية

5. استنتج eVf و $e\Lambda f$

الجواب: دراسة زوجية الأعداد: a و b و c و d

$$a = 6n + 1 = 2 \times 3n + 1 = 2 \times k + 1 \quad \text{حيث: } k = 3n$$

وبالتالي: a عدد فردي

$$b = 12n^2 + 2 = 2(6n^2 + 1) = 2 \times k \quad \text{حيث: } k = 6n^2 + 1$$

وبالتالي: b عدد زوجي

2) نبين أن $a + b$ مضاعف للعدد 3

$$a + b = 6n + 1 + 12n^2 + 2 = 6n + 12n^2 + 3 = 3(2n + 4n^2 + 1) \quad \text{نضع: } k = 2n + 4n^2 + 1$$

فتجد: $a + b = 3 \times k$ ومنه: $a + b$ مضاعف للعدد 3

(3) نبين أن e مضاعف للعدد 3 :

$$k = 2^n \times 2 \quad \text{حيث} \quad e = 2^{n+3} - 2^{n+1} = 2^n \times 2^3 - 2^n \times 2^1 = 2^n \times (2^3 - 2) = 2^n \times 6 = 2^n \times 3 \times 2 = 3 \times k$$

ومنه : e مضاعف للعدد 3

نبين أن f مضاعف للعدد 11 :

$$k = 2^n \quad \text{حيث} \quad f = 3 \times 2^{n+1} + 5 \times 2^n = 3 \times 2^n \times 2^1 + 5 \times 2^n = 2^n (3 \times 2^1 + 5) = 2^n \times 11 = 11 \times k$$

ومنه : f مضاعف للعدد 11

(4) تفكيك العددين e و f الى جداء عوامل أولية:

$$e = 2^n \times 3 \times 2 = 2^n \times 2 \times 3 = 2^{n+1} \times 3$$

$$\text{اذن : } e = 2^{n+1} \times 3$$

وجدنا : $f = 2^n \times 11$ وهو تفكيك الى جداء عوامل أولية لأن 11 عدد أولي

(5) استنتاج $e \wedge f$ و $e \vee f$

$$f = 2^n \times 11 \quad \text{و} \quad e = 2^{n+1} \times 3$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة الى أصغر أس ومنه: $e \wedge f = 2^n$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة والغير المشتركة مرفوعة الى أكبر أس

$$\text{ومنه : } e \vee f = 2^{n+1} \times 3 \times 11 = 2^{n+1} \times 33$$

تمرين 25: حدد من بين الأعداد التالية الأعداد الأولية معللا جوابك: 1 و 49 و 653 و 667 و 500000103

الجواب (1): عدد غير أولي لأن لديه قاسم وحيد

(2) عدد يقبل القسمة على 7 ومنه عدد غير أولي

(3) هل العدد و 653 أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 \leq 653$ وهي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23 لأن : $23^2 = 529$ و $29^2 = 841$

ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 653 اذن العدد و 653 أولي

(4) العدد 667 يقبل القسمة على 3. وبالتالي ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

(5) العدد 500000103 مجموع أرقامه مضاعف للعدد 3 اذن يقبل القسمة على 3 ومنه عدد غير أولي

تمرين 26: حدد الرقم x لكي يكون العدد : $23 \times 4 \times x$ قابلا للقسمة على 3 وعدد فردي (حدد جميع الأعداد الممكنة)

الجواب: $0 \leq x \leq 9$ العدد : $23 \times 4 \times x$ فردي يعني أن الرقم x هو 1 أو 3 أو 5 أو 7 أو 9 فقط

و العدد $23 \times 4 \times x$ قابل للقسمة على 3 يعني : $2 + 3 + x + 4 + x = 3k$ لأنه مضاعف للعدد 3

يعني $9 + 2x = 3k$ اذن : وبالتعويض بالأرقام 1 أو 3 أو 5 أو 7 أو 9 نلاحظ أن : $x = 3$ أو $x = 9$ ومنه الأعداد المطلوبة

هي : 23343 و 23949

تمرين 27: حدد الرقم x لكي يكون العدد : $752 \times 3 \times x$ قابلا للقسمة على 3 وعدد زوجي (حدد جميع الأعداد الممكنة)

الجواب: $0 \leq x \leq 9$ العدد : $752 \times 3 \times x$ زوجي يعني أن الرقم x هو 2 أو 4 أو 6 أو 8 أو 0 فقط

و العدد $752 \times 3 \times x$ قابل للقسمة على 3 يعني : $7 + 5 + 2 + x + 3 + x = 3k$ لأنه مضاعف للعدد 3

يعني $17 + 2x = 3k$ اذن : وبالتعويض بالأرقام 2 أو 4 أو 6 أو 8 أو 0 نلاحظ أن : $x = 2$ أو $x = 8$ هما الخالتان المقبولتان

ومنه العددان المطلوبان هما : 752232 و 752838

تمرين 28: نعتبر العدد $7a3b4$ حيث a و b رقمين صحيحين طبيعيين وأصغر من أو يساوي 5

حدد الرقمين a و b لكي يكون العدد : $7a3b4$ قابلا للقسمة على 3 و 4 في آن واحد (حدد جميع الأعداد الممكنة)

الجواب : العدد : $7a3b4$ قابل للقسمة على 3 يعني $7 + a + 3 + b + 4 = 3k$

يعني $14 + a + b = 3k$; وبما أن العدد : $7a3b4$ قابل للقسمة على 4 يعني $b4$ من مضاعفات العدد 4

وعلمنا أن : $0 \leq b \leq 5$ فان القيم الممكنة للعدد b هي 0 أو 2 أو 4 فقط ومنه :

إذا كان : $b = 0$ أفان : $a = 1$ أو $a = 4$ لأن $0 \leq a \leq 5$

إذا كان : $b = 2$ أفان : $a = 2$ أو $a = 5$ لأن $0 \leq a \leq 5$

إذا كان : $b = 4$ أفان : $a = 0$ أو $a = 3$ لأن $0 \leq a \leq 5$

ومنه الأعداد المطلوبة هي : 74304 و 72324 و 75324 و 70344 و 73344 و 71304

تمرين 29: $n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن : $A = 7n^2 + 21n + 35$ مضاعف للعدد 7

(2) بين أن : $B = (2n-6)^2 + 8n + n(n+1)$ عدد زوجي

(3) بين أن : $C = (2n-6)^2 + 8n + (n(n+1))^2$ يقبل القسمة على 4

الجواب (1): $A = 7n^2 + 21n + 35 = 7(n^2 + 3n + 5) = 7k$

حيث $k = n^2 + 3n + 5$ ومنه $A = 7n^2 + 21n + 35$ مضاعف للعدد 7

(2) $B = (2n-6)^2 + 8n + n(n+1)$

$n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي

و $2n-6 = 2(n-3) = 2k'$ عدد زوجي

اذن : $(2n-6)^2$ هو عدد زوجي لأن مربع عدد زوجي هو عدد زوجي

و $8n = 2(4n) = 2k''$ عدد زوجي

وبالتالي $B = (2n-6)^2 + 8n + n(n+1)$ عدد زوجي لأنه مجموع أعداد زوجية

(3) بين أن : $C = (2n-6)^2 + 8n + (n(n+1))^2$ يقبل القسمة على 4

$n(n+1) = 2k_1$ حيث $k_1 \in \mathbb{N}$ اذن : $(n(n+1))^2 = (2k_1)^2 = 4(k_1)^2 = 4k$

و $8n = 4 \times 2n = 4 \times k'$ و $(2n-6)^2 = (2(n-3))^2 = 4 \times (n-3)^2 = 4 \times k''$

ومنه : $C = (2n-6)^2 + 8n + (n(n+1))^2 = 4 \times k'' + 4 \times k' + 4 \times k = 4 \times (k'' + k' + k) = 4 \times a$

حيث $a \in \mathbb{N}$ وبالتالي $C = (2n-6)^2 + 8n + (n(n+1))^2$ يقبل القسمة على 4

تمرين 30: $n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن العددين $n^2 + 3n + 4$ و $n^2 - 3n + 4$ زوجيان

(2) استنتج أن العدد : $n^4 - n^2 + 16$ عدد يقبل القسمة على 4

الجواب (1): $n^2 + 3n + 4 = n^2 + n + 2n + 4 = n(n+1) + 2(n+2)$

$n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين اذن هو عدد زوجي

و العدد $2(n+2)$ عدد زوجي

وبالتالي : $n^2 + 3n + 4$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين زوجيين

$n^2 - 3n + 4 = n^2 + n - 4n + 4 = n(n+1) - 2(2n+2)$

$n(n+1)$ هو عدد زوجي و العدد $2(2n+2)$ عدد زوجي

وبالتالي : $n^2 - 3n + 4$ عدد زوجي لأنه فرق عددين زوجيين

(2) لدينا $n^2 + 3n + 4$ و $n^2 - 3n + 4$ عددا زوجيان

يعني $n^2 + 3n + 4 = 2k$ و $n^2 - 3n + 4 = 2k'$

حيث $k \in \mathbb{N}$ و $k' \in \mathbb{N}$

اذن $(n^2 + 3n + 4)(n^2 - 3n + 4) = (2k)(2k') = 4kk'$

يعني $((n^2 + 4) + 3n)((n^2 + 4) - 3n) = 4kk'$

يعني $(n^2 + 4)^2 - 9n^2 = 4kk'$ يعني $n^4 + 8n^2 + 16 - 9n^2 = 4kk'$

يعني $n^4 - n^2 + 16 = 4kk'$

وهذا يعني أن $n^4 - n^2 + 16$ عدد يقبل القسمة على 4

تمرين 31: $n \in \mathbb{N}$

(1) أنشر : $(n+1)^2 - n^2$

(2) استنتج أن كل عدد فردي هو فرق مربعين متتاليين

(3) أكتب الأعداد 17 و 29 و 29 و 2019 على شكل فرق مربعين متتاليين

(الجواب: 1) $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

(2) العدد $2n+1$ هو عدد فردي مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

اذن: $n^2 - (n+1)^2 = 2n+1$ حيث n و $n+1$ هما عددين متتاليين

(3) تطبيق : $17 = 2 \times 8 + 1$ اذن: $17 = (8+1)^2 - 8^2 = 9^2 - 8^2$

$29 = 2 \times 14 + 1$ اذن: $29 = (14+1)^2 - 14^2 = 15^2 - 14^2$

$37 = 2 \times 18 + 1$ اذن: $37 = (18+1)^2 - 18^2 = 19^2 - 18^2$

$2019 = 2 \times 1009 + 1$ اذن: $2019 = (1009+1)^2 - 1009^2 = 1010^2 - 1009^2$

تمرين 32: نضع $a = 33075$ و $b = 7875$

(1) فكك a و b الى جداء عوامل أولية و أحسب $7875 \wedge 33075$ و $7875 \vee 33075$

(2) استنتج تبسيطا للعددين $\frac{a}{b}$ و $\sqrt{a}$

33075	3	7875	3
11025	3	2625	3
3675	3	875	5
1225	5	175	5
245	5	35	5
49	7	7	7
7	7	1	1
1			

(الجواب: 1) $7875 = 3^2 \times 5^3 \times 7$ $33075 = 3^3 \times 5^2 \times 7^2$

$7875 \wedge 33075 = PGCD(7875; 33075) = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 1575$

$7875 \vee 33075 = PPCM(7875; 33075) = 3^3 \times 5^3 \times 7^2 = 165375$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{3^3 \times 5^2 \times 7^2}{3^2 \times 5^3 \times 7} = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5}$

$\sqrt{a} = \sqrt{3^3 \times 5^2 \times 7^2} = 3 \times 5 \times 7 \times \sqrt{3} = 105\sqrt{3}$

لأن : $\sqrt{a^2} = a$ و $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

تمرين 33: نضع $a = 540000$

(1) فكك a الى جداء عوامل أولية

(2) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم يجب ضربه في العدد a للحصول على مربع عدد صحيح طبيعي وحدده

(الجواب: 1) $540000 = 2^5 \times 3^3 \times 5^4$

لكي يكون العدد a مربع لعدد صحيح طبيعي يجب أن يكون جميع العوامل الأولية في تفكيكه

مرفوعة الى أس زوجي: $2^5 \times 3^3 \times 5^4 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3^4 \times 5^4 = (2^3 \times 3^2 \times 5^2)^2 = (1800)^2$

دن يجب ضرب العدد a في $2 \times 3 = 6$

تمرين 34: (1) حدد جميع قواسم العدد 22

(2) استنتج جميع الأزواج (x, y) من الأعداد الصحيحة الطبيعية و التي تحقق العلاقة $(x+2)(y+1) = 22$

(3) حدد جميع الأزواج (x, y) من الأعداد الصحيحة الطبيعية و التي تحقق العلاقة $x + xy + y = 30$

(الجواب: 1) $22 = 2^1 \times 11^1$

اذن قواسم العدد 22 هي: 1 و 2 و 22 و 22

(2) لدينا x و y عدنان صحيحان وتحقق العلاقة $(x+2)(y+1) = 22$

اذن: $\begin{cases} x+2=1 \\ y+1=22 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=2 \\ y+1=11 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=11 \\ y+1=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=22 \\ y+1=1 \end{cases}$

ومنه : الأزواج (x, y) التي تحقق العلاقة هي : $(0; 10); (9; 1); (20; 0)$

(3) $x + xy + y = 30$ تكافئ $x + xy + y + 1 = 31$ تكافئ $x(1+y) + (y+1) = 31$

تكافئ $(y+1)(x+1) = 31$

اذن : $(x+1)$ و $(y+1)$ قاسمان للعدد 31 ومنه : $\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=31 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+1=31 \\ y+1=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=30 \\ y=0 \end{cases} \text{ يعني}$$

ومنه : الأزواج (x, y) التي تحقق العلاقة (2) هي : $(0; 30)$; $(30; 0)$

تمرين 35: 1) حدد الأزواج (x, y) من الأعداد الصحيحة الطبيعية و التي تحقق العلاقة $x^2 - y^2 = 51$ (1)

$$(2) \text{ حدد الأزواج } (a; b) \text{ من الأعداد الصحيحة الطبيعية و التي تحقق النظام } (S) \begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

الجواب: 1) $x^2 - y^2 = 51$ يعني $(x+y)(x-y) = 51$

اذن : $x+y$ و $x-y$ قاسمان للعدد 51

لنحدد قواسم العدد 51 لدينا $51 = 3^1 \times 17^1$ اذن قواسم العدد 51 هي : 1 و 3 و 17 و 51

$$\text{ومنه : } \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases} \text{ لأن : } x-y < x+y$$

$$\text{يعني } \begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$$

ومنه : الأزواج (x, y) التي تحقق العلاقة (1) هي : $(10; 7)$; $(26; 25)$

(2)

$$\text{حيث } a \text{ و } b \text{ عددين صحيحين طبيعيين } \begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$a = 12x \text{ و } b = 12y \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ عددان صحيحان و } x \wedge y = 1$$

$$\text{لدينا : } a^2 - b^2 = 7344 \text{ تكافئ } (12x)^2 - (12y)^2 = 7344$$

$$\text{تكافئ } 144x^2 - 144y^2 = 7344 \text{ تكافئ } 144(x^2 - y^2) = 7344$$

$$\text{تكافئ } x^2 - y^2 = \frac{7344}{144} \text{ تكافئ } x^2 - y^2 = 51$$

وحسب نتيجة السؤال السابق فان : $(y=25 \text{ و } x=26)$ أو $(y=7 \text{ و } x=10)$

ومنه : $a=312$, $b=300$ أو $a=120$, $b=84$

ومنه : الأزواج $(a; b)$ من الأعداد الصحيحة الطبيعية و التي تحقق النظام (S) هي : $(312; 300)$; $(120; 84)$

تمرين 36: ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844$ مع $x \geq 2$

$$(1) \text{ بين أن : } 2^{x-2} (1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$$

(2) بين أن : $16844 - 7^{2y+1}$ عدد فردي

(3) استنتج أن : $x=2$ ثم حدد قيمة y

$$\text{الجواب: 1) لدينا } 2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844$$

$$\text{يعني } 2^{x-2} + 6^x = 16844 - 7^{2y+1} \text{ يعني } 2^{x-2} + (2 \times 3)^x = 16844 - 7^{2y+1}$$

$$\text{يعني } 2^{x-2} + 2^x \times 3^x = 16844 - 7^{2y+1}$$

$$\text{يعني } 2^{x-2} + 2^{x-2} \times 2^2 \times 3^x = 16844 - 7^{2y+1}$$

$$\text{يعني } 2^{x-2} (1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$$

(2) لدينا: 16844 عدد زوجي و 7 عدد فردي اذن : 7^{2y+1} مهما تكن $y \in \mathbb{N}$ ومنه فان العدد : $16844 - 7^{2y+1}$ عدد فردي

(3) استنتج : لدينا $2^{x-2} (1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$ و $16844 - 7^{2y+1}$ عدد فردي

اذن : $2^{x-2} (1 + 4 \times 3^x)$ عدد فردي ومنه $2^{x-2} = 1$ ومنه $x-2=0$ يعني $x=2$

$$\text{و لدينا } 2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844 \text{ ومنه } 2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^2 = 16844$$

$$\text{يعني : } 7^{2y+1} = 16844 + 37 \text{ يعني } 7^{2y+1} = 16807 \text{ يعني } 7^{2y+1} = 7^5$$

$$2y+1=5 \text{ يعني } y=2$$

تمرين 37: $n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن العدد $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ مربع كامل

(2) أنشر : $(n^2 + 3n + 1)^2$

(3) استنتج أن العدد : $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ مربع كامل

ملحوظة: $a \in \mathbb{N}$ مربع كامل إذا وفقط إذا كان يكتب على الشكل : $a = b^2$ حيث $b \in \mathbb{N}$

الجواب (1): $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1 = (n^3 + 3n^2 + n)^2 + 2(n^3 + 3n^2 + n) + 1$

$$= (n^3 + 3n^2 + n + 1)^2$$

وبالتالي: $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ مربع كامل

$$(n^2 + 3n + 1)^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \quad (2)$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + n)(n^2 + 2n + 3n + 6) + 1 \quad (3)$$

$$= (n^2 + n)(n^2 + 5n + 6) + 1 = n^4 + 5n^3 + 6n^2 + n^3 + 5n^2 + 6n + 1$$

$$= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

اذن $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ مربع كامل

تمرين 38: يمكن توزيع تلاميذ إحدى المؤسسات التعليمية إلى أقسام تتضمن كلها نفس العدد من التلاميذ ويمكن أن يكون هذا

العدد إما 28 تلميذاً أو 36 تلميذاً. حدد عدد تلاميذ هذه المؤسسة إذا علمت أنه محصور بين 1000 و 1020 تلميذاً.

الجواب: العدد الإجمالي للتلاميذ هو مضاعف مشترك للعددين 28 و 36

نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين أولاً أي : $28 \vee 36$

$$36 = 6 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^2 \quad \text{و} \quad 28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$$

$$\text{ومنه : } 28 \vee 36 = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$$

يكفي أن نبحث عن مضاعفات العدد 252 والمحصورة بين 1000 و 1020

$$252 \times 2 = 504 \quad 252 \times 3 = 756 \quad 252 \times 4 = 1008 \quad 252 \times 5 = 1260$$

ومنه عدد التلاميذ المطلوب هو : **1008**

تمرين 39: نريد غرس أشجار على محيط حديقة على شكل مثلث أبعاده هي : 42m و 70m و 98m حيث توجد شجرة في كل

رأس من رؤوس المثلث والمسافة بين شجرتين متتابعتين ثابتة

(1) ماهي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين؟

(2) ماهو اذن عدد الأشجار التي يمكن غرسها في هذه الحالة

الجواب (1): نحدد أولاً القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 42 و 70 و 98

$$98 = 2 \times 49 = 2 \times 7^2 \quad \text{و} \quad 42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7 \quad \text{و} \quad 70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$$

$$42 \wedge 70 \wedge 98 = PGCD(42; 70; 98) = 2 \times 7 = 14$$

اذن أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين هو 14

$$(2) \quad [(42 \div 14)] + [(70 \div 14)] + [(98 \div 14)] = 3 + 5 + 7 = 15$$

اذن هناك 15 شجرة يمكن غرسها في هذه الحالة

تمرين 40: أرادت شركة أن تثبت أعمدة ضوئية على محيط ساحة عمومية مستطيلة الشكل أبعادها هي : 240m و 320m حيث يوجد

عمود ضوئي في كل ركن من رؤوس المستطيل والمسافة بين عمودين متتابعين ثابت و عدد صحيح طبيعي

(1) ماهي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين عمودين متجاورتين؟

(2) ماهو اذن عدد الأعمدة الضوئية اللازمة للساحة في هذه الحالة؟

(3) ماهي المسافات التي تفوق 15m والتي يمكن للجماعة تركها بين عمودين متتابعين ؟ أحسب في كل حالة الأعمدة اللازمة

الجواب (1): نحدد أولاً القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 240 و 320

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \quad \text{و} \quad 320 = 2^6 \times 5$$

$$240 \wedge 320 = \text{PGCD}(240, 320) = 80$$

اذن أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين عمودين متجاورين هو 80

$$(2) \text{ محيط الساحة هو : } (240 + 320) \times 2 = 1120m$$

اذن عدد الأعمدة الضوئية اللازمة للساحة في هذه الحالة هو : $1120m \div 80 = 14m$

(3) القواسم المشتركة ل : 240 و 320 هي : 1 و 2 و 4 و 5 و 7 و 8 و 10 و 16 و 20 و 30 و 40

المسافات التي تفوق 15 مترا والتي يمكن للحماعة تركها بين عمودين متتابعين هي : 16 أو 20 أو 30 أو 40 أو 80

• اذا تم ترك 16 مترا بين عمودين متتابعين فان عدد الأعمدة اللازمة يكون : $1120m \div 16 = 70m$

• اذا تم ترك 20 مترا بين عمودين متتابعين فان عدد الأعمدة اللازمة يكون : $1120m \div 20 = 56m$

• اذا تم ترك 40 مترا بين عمودين متتابعين فان عدد الأعمدة اللازمة يكون : $1120m \div 40 = 28m$

• اذا تم ترك 80 مترا بين عمودين متتابعين فان عدد الأعمدة اللازمة يكون : $1120m \div 80 = 14m$

تمرين 41: $n \in \mathbb{N}^*$

بين أن العدد $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ غير جذري (يمكن استعمال البرهنة بالخلف)

الجواب: نفترض أن : العدد $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ جذري

يعني أنه يكتب على الشكل : $\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{p}{q}$ حيث $p \wedge q = 1$ و $p \in \mathbb{N}$ و $q \in \mathbb{N}^*$

ومنه $\frac{n}{n+1} = \frac{p^2}{q^2}$ وبما أن $\frac{p}{q}$ وحيد فان : $n = p^2$ و $n+1 = q^2$ و $(p^2 \wedge q^2 = 1)$

ومنه $q^2 - p^2 = 1$ أي أن : $(q-p)(q+p) = 1$

يعني $\begin{cases} q-p=1 \\ q+p=1 \end{cases}$ ومنه $p=0$ اذن $n=0$ وهذا خاطئ

اذن افتراضنا خاطئ ومنه العدد $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ غير جذري

تمرين 42: ليكن a عددا حقيقيا

(1) بين أن : $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

(2) استنتج أن العدد : 100010001 ليس أوليا

الجواب (1): لاثبات هذه المتساوية نقوم بنشر $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

وبعد التبسيط نجد : $a^4 + a^2 + 1$

(2) استنتاج : $100010001 = 100000000 + 10000 + 1 = 10^8 + 10^4 + 1$

$$100010001 = (10^2)^4 + (10^2)^2 + 1$$

وبتطبيق المتساوية (1) نجد :

$$100010001 = (10^4 + 10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1)$$

$$100010001 = 10101 \times 9901$$

اذن : العدد : 100010001 ليس أوليا لان لديه قاسمين على الأقل هما : 9901 و 10101