ثانوية التقدم التأهيلية

نيابة سيدي البرنوصي

الموسم الدراسي : 2011-2010

تصحيح الفرض الثاني

أولمبياد الرياضيات

المستوى : الجذع المشترك العلمي

التمرين الأول

لدينا a و b عددين حقيقيين بحيث : $-2 \le a \le 1$ و $-1 \le b \le 2$:

لدينا : $-2 \le a \le 1$

إذن : $-1 \le a+1 \le 2$

يعني : $0 \le (a+1)^2 \le 4$

أي : $0 \le a^2+2a+1 \le 4$

ومنه : $\boxed{-1 \le a^2+2a \le 3}$: (1)

لدينا : $-1 \le b \le 2$

إذن : $-3 \le b-2 \le 0$

يعني : $0 \le (b-2)^2 \le 9$

أي : $0 \le b^2-4b+4 \le 9$

أي : $-4 \le b^2-4b \le 5$

ومنه : $\boxed{-5 \le -b^2+4b \le 4}$: (2)

نجمع (1) و (2) نجد : $-1-5 \le a^2+2a-b^2+4b \le 3+4$

وبالتالي فإن : $\boxed{-6 \le a^2-b^2+2a+4b \le 7}$

التمرين الثاني

لدينا : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$

إذن : $= \sqrt{2^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}^2}$

$= \sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2}}$

إذن حسب ما سبق لدينا : $\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

إذن : $= \sqrt{2}.\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$

يعني : $= \sqrt{2}.\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}$

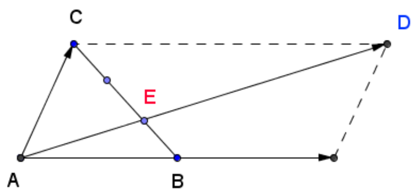
$= \sqrt{2}.\sqrt{4-2}$

إذن : $= \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$

وبالتالي : $\boxed{\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2}$

التمرين الثالث

لدينا : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



وحيث أن: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ أي: $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BE}$

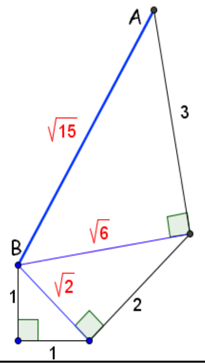
فإن: $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BE}$

إذن : $= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = 3\overrightarrow{AE}$

إذن : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$

وبالتالي: النقط D و E و A مستقيمية.

التمرين الرابع



لدينا : $\sqrt{15}^2 = 3^2 + \sqrt{6}^2$ و $\sqrt{6}^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2$

و $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$

وباستعمال مبرهنة فيثاغورس على ثلاث مثلثات – انظر الشكل-

نحصل على القطعة $[AB]$ طولها $AB = \sqrt{15}$.

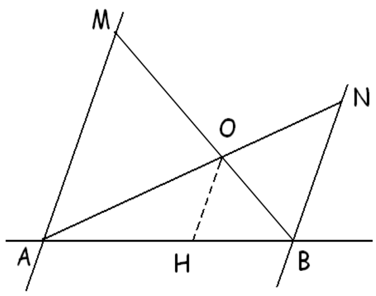
التمرين الخامس

- نعتبر المثلث AMB لدينا $(AM)//(OH)$ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

$$\boxed{\frac{OH}{AM} = \frac{BH}{BA}} \quad : \quad (1)$$

- نعتبر المثلث ANB لدينا $(BN)//(OH)$ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

$$\boxed{\frac{OH}{BN} = \frac{AH}{AB}} \quad : \quad (2)$$



بجمع (1) و (2) نجد : $\frac{OH}{AM} + \frac{OH}{BN} = \frac{AH}{AB} + \frac{BH}{BA}$

وحيث أن: $H \in [AB]$ و $AH + BH = AB$

فإن : $OH\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}\right) = \frac{AH + BH}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

ومنه : $OH\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}\right) = 1$

وبالتالي : $\boxed{\frac{1}{OH} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}}$