EXERCICES : EQUILIBRE D'UN CORPS EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE (I)

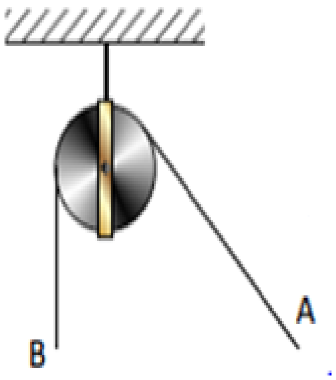
Méthode de résolution d'un problème à moments

Pour résoudre un problème faisant intervenir des forces qui agissent sur un solide mobile autour d'un axe, nous allons systématiquement appliquer la procédure suivante :

a) Indiquer le système étudié
b) Faire le bilan des forces
c) Déterminer l'axe de rotation et fixer un sens positif de rotation.
d) Exprimer le moment des différentes forces et indiquer s'il est positif ou négatif
e) Appliquez les relations suivantes: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext}) = 0$

Exercice 1

Une poulie de poids $P_0 = 20N$ est mobile sans frottement autour de son axe Δ fixe. Nous appliquons sur l'extrémité A d'une corde de poids négligeable, passant par la gorge d'une poulie, une force $\vec{F}$ d'intensité $F = 300N$ dont la direction fait un angle de 60° avec la verticale.

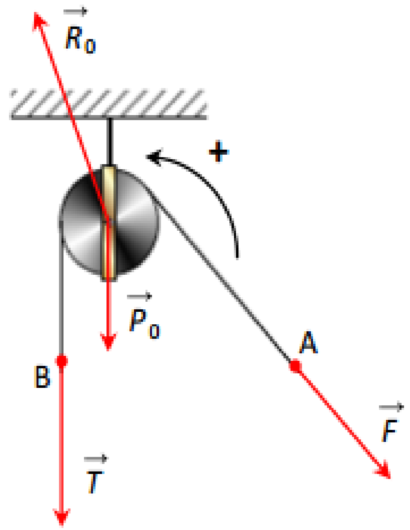


1) déterminer la force $\vec{T}$ qu'il faut appliquer sur l'autre extrémité B de la corde pour réaliser l'équilibre.
2) déterminer alors la réaction $\vec{R_0}$ exercée par l'axe sur la poulie.

Réponse

1) détermination de $\vec{T}$

- système: l'ensemble (corde, poulie)
- bilan des forces extérieures reçues:
  - le poids $\vec{P}_0$ de la poulie
  - la force $\vec{F}$ appliquée en A
  - la force $\vec{T}$ appliquée en B
  - la réaction $\vec{R}_0$ exercée par l'axe.
- conditions d'équilibre:
  - immobilité de G: $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$
  - absence de rotation autour de Δ: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$
- exploitation des relations précédentes: choisissons un sens positif (voir schéma) et évaluons les moments.



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$$

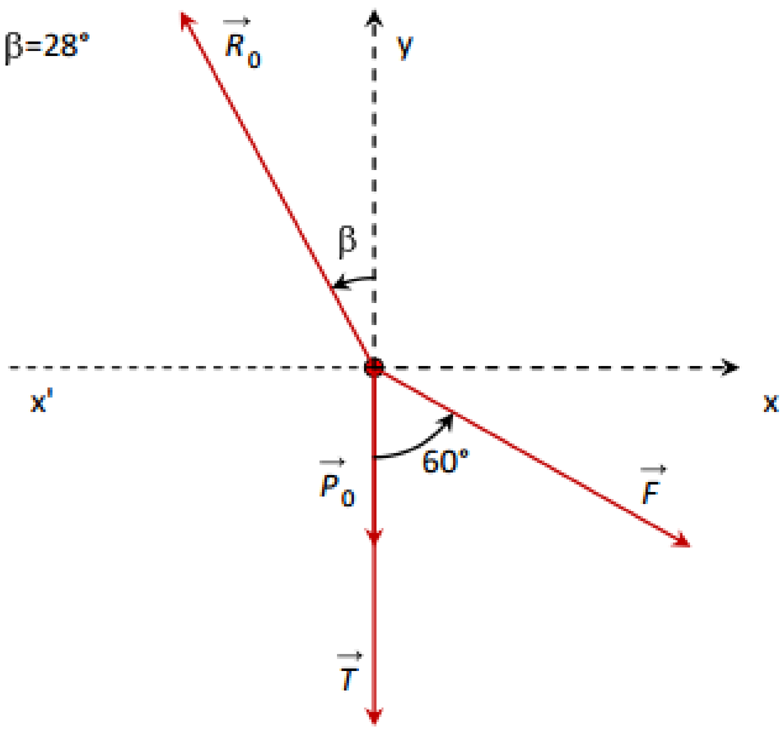
$$0 - F \times r + T \times r + 0 = 0 \Rightarrow -F \times r + T \times r = 0 \quad \Rightarrow \boxed{T=F}$$

Les forces de part et d'autre de la poulie ont la même intensité. Seules leurs directions changent.

2) détermination de $\vec{R}_0$

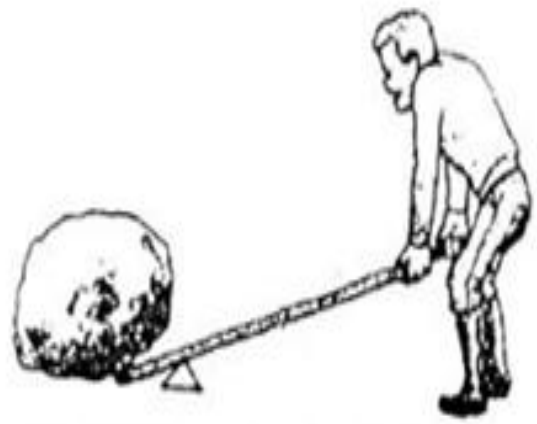
Pour déterminer $\vec{R}_0$ il faut projeter la relation vectorielle $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$ dans un repère.

Vérifier que $R_0 = 540N$ et β=28°



Exercice: 2

Un levier est un solide mobile autour d'un axe à l'aide duquel on peut appliquer une grande force sur un objet en exerçant une petite force sur le levier. On distingue les leviers à deux bras et les leviers à un bras.



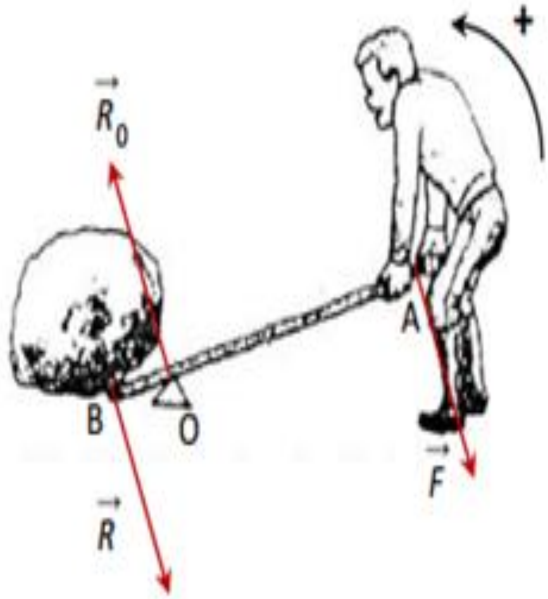
Un rocher, lorsqu'il est soulevé, exercent en A sur le levier une force résistante $\vec{R}$ d'intensité $R = 2700N$ dont la direction est perpendiculaire à celle du levier (voir figure). Le poids du levier est négligeable.

$OA = 0{,}1m$; $OB = 0{,}9m$

1) déterminer la force motrice de F qu'il faut appliquer orthogonalement au levier pour maintenir l'équilibre.
2) déterminer la réaction $\vec{R_0}$ de l'appui.

Réponse

1) détermination de $\vec{T}$
   - système: le levier
   - bilan des forces extérieures reçues:
     - le poids $\vec{P_0}$ du levier que nous négligeons.
     - la force motrice $\vec{F}$
     - la réaction $\vec{R}$ exercée par le rocher
     - la réaction de l'appui $\vec{R_0}$



- conditions d'équilibre:
  - immobilité de G: $\vec{R}+\vec{T}+\vec{R_0}=\vec{0}$
  - absence de rotation autour de Δ: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R_0})=0$
- exploitation des relations précédentes: choisissons un sens positif (voir schéma) et évaluons les moments.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R_0})=0$$

$$R\times OB-F\times OA+0=0 \Rightarrow \quad F=R\frac{OA}{OB}$$

$$\text{Numériquement: } F=2700\times\frac{0{,}1}{0{,}9}=300N$$

La force motrice a une intensité beaucoup plus faible que la force résistante. Ceci est dû au rapport de bras de levier $\frac{OA}{OB}$

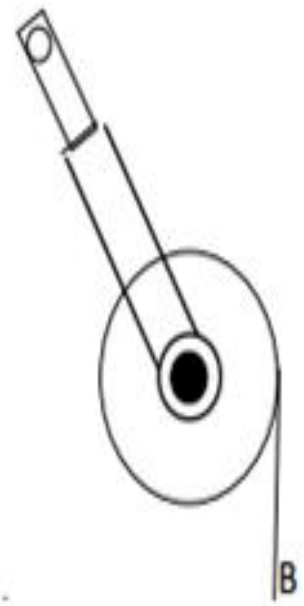
2) détermination de $\vec{R_0}$

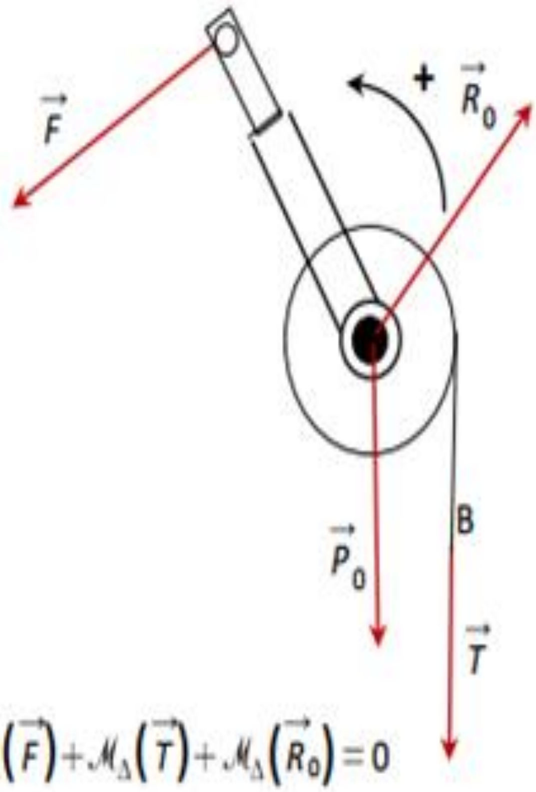
Pour déterminer $\vec{R_0}$ il faut projeter la relation vectorielle $\vec{F}+\vec{R}+\vec{R_0}=\vec{0}$ dans un repère. Remarquer que les forces ont la même direction: $R_0=R+F=2700+300=3000N$

Exercice 3

Un treuil mobile sans frottement est constitué d'un cylindre homogène de poids $P_0 = 200N$ et de rayon $r = 10cm$, et d'une manivelle de poids négligeable et de longueur $L = 40cm$. un solide exerce à l'extrémité inférieure B de la corde de masse négligeable une force d'intensité $T = 200N$.

Déterminer à l'équilibre la valeur de la force motrice F qu'il faut appliquer sur la poignée A (perpendiculairement à la manivelle) (voir figure).





Détermination de $\vec{F}$

- système: l'ensemble (corde, treuil)
- bilan des forces extérieures reçues:
  - le poids $\vec{P}_0$ de la poulie
  - la force $\vec{F}$ appliquée en A
  - la force $\vec{T}$ appliquée en B
  - la réaction $\vec{R}_0$ exercée par l'axe.
- conditions d'équilibre:
  - immobilité de G: $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$
  - absence de rotation autour de Δ: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0)+\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0)=0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0)+\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0)=0$$

$$0-F\times r+T\times r+0=0 \Rightarrow -F\times L+T\times r=0 \quad \text{soit} \quad \boxed{F=T\frac{r}{L}}$$

Le rapport $\frac{r}{L}=\frac{1}{4}$ d'où $F=\frac{T}{4}=50N$. Une force relativement faible (F=50N) permet d'équilibrer une force relativement importante (T=200N).

<u>Remarque</u>: la relation traduisant l'immobilité de G permettrait de déterminer la réaction $\vec{R}_0$