

Les Transformations du plan

Exercice 1 :

$ABCD$ un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$

et J le milieu du segment $[AD]$

1) faite une figure

2) Déterminer $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$ et $S_O([AB])$

3) Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$ et

$S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}([OI])$

4) Déterminer $t_{\overline{BC}}(A)$ et $t_{\overline{IJ}}(B)$ et $t_{\overline{IJ}}([OB])$

Solution :

$$2) S_O(A) = C \text{ Car } OA = OC$$

$$S_O(B) = D \text{ Car } OB = OD$$

$$S_O(O) = O \text{ Car } O \text{ est invariant}$$

$$\text{On a } \begin{cases} S_O(A) = C \\ S_O(B) = D \end{cases} \text{ donc } S_O([AB]) = [CD]$$

Et on a $(AB) \parallel (CD)$ car l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

• $S_{(AC)}(B) = D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

• $S_{(AC)}(A) = A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants

• $S_{(AC)}(O) = O$ car $O \in (AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants

$$\bullet \text{ On a } \begin{cases} S_{(AC)}(A) = A \\ S_{(AC)}(B) = D \end{cases} \text{ donc } S_{(AC)}([AB]) = [AD]$$

• On a I le milieu du segment $[AB]$ et

$S_{(AC)}([AB]) = [AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I) = J$

$$\bullet \text{ On a } \begin{cases} S_{(AC)}(O) = O \\ S_{(AC)}(I) = J \end{cases} \text{ donc } S_{(AC)}([OI]) = [OJ]$$

4)

• On a $ABCD$ un losange donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $t_{\overline{BC}}(A) = D$

• On a ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$

$$\text{donc } \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$$

Alors $2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{IJ}$ donc $t_{\overline{IJ}}(B) = O$

• On a $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

Donc

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{IJ} \text{ c a}$$

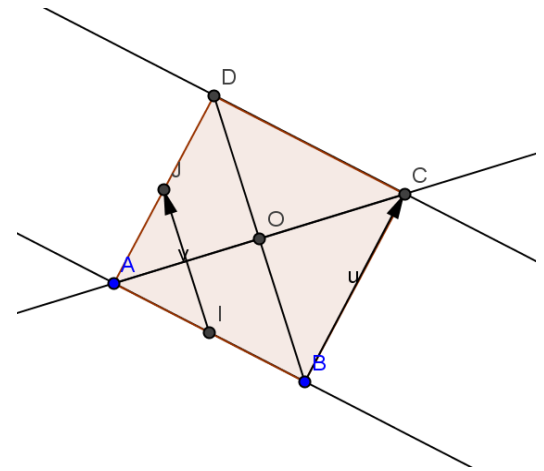
d

$$t_{\overline{IJ}}(O) = D$$

et on a

$$t_{\overline{IJ}}(B) = O$$

donc



$$t_{\overline{IJ}}([OB]) = [DO]$$

Exercice 2: Écrire l'expression vectorielle suivante

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IB} \text{ en utilisant une homothétie}$$

Solution :

Soit l'homothétie $h_{(I, -\frac{2}{3})}$

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IB} \text{ ssi } h(B) = C$$

Exercice 3 : Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ Avec } I \text{ un point donné}$$

$$2\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{BA} \text{ Avec } \Omega \text{ un point donné}$$

$$3\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ Avec } I \text{ un point donné}$$

Solution : $h(I, k)$:

$$1) h(A) = B \text{ ssi } \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA}$$

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ ssi } 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \text{ ssi}$$

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ ssi } -\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \text{ donc } h\left(I, \frac{1}{3}\right)$$

$$2) \overrightarrow{2\Omega B} = -\overrightarrow{BA} \text{ ssi } \overrightarrow{2\Omega B} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B} \text{ ssi } \\ \overrightarrow{2\Omega B} - \overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A} \text{ ssi } \overrightarrow{2\Omega B} = \overrightarrow{AB} \text{ ssi } \overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A} \\ \text{donc } h(\Omega, -1)$$

$$3) 3\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ ssi } 3\overrightarrow{IA} - 5(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \text{ ssi } \\ 3\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{AI} - 5\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ ssi } 3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \text{Ssi } 8\overrightarrow{IA} = 5\overrightarrow{IB} \text{ ssi } \overrightarrow{IB} = \frac{8}{5}\overrightarrow{IA} \text{ donc } h\left(I, \frac{8}{5}\right)$$

Exercice 4 : ABCD un parallélogramme et I et J deux points tq $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$

1) faite une figure

2) Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI)

par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

a) Montrer que $h((AB)) = (CD)$

a) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k = -2$

4) Soit le point K tq $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J) = K$

b) Montrer que $AI = \frac{1}{2}CK$

Solution :

1) La figure

2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$?

On a ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

On donc $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI)) = (BJ)$

Déduction : on sait que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc

$(AI) \parallel (BJ)$

3) a) on a $h(B) = C$ et on sait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc

$h((AB)) = (CD)$

3) b) on a $h(B) = C$ donc $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}$ donc

$3\overrightarrow{CI} = 2(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB})$ donc $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI} - 2\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$ donc

$$\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$$

Donc $k = -2$

4) a) $h(J) = K$?

On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IJ}$ donc $h(J) = K$

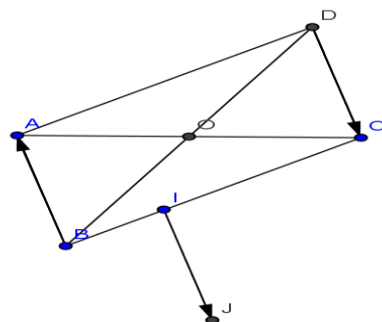
4) b) on a $\begin{cases} h(J) = K \\ h(B) = C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{BJ}$ d'après la

propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\|\overrightarrow{CK}\| = \|-2\overrightarrow{BJ}\|$ donc $\|\overrightarrow{CK}\| = |-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$ donc

$$CK = 2BJ$$

Et on



$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ donc ABJI parallélogramme donc $BJ = AI$

Donc $CK = 2AI$ donc $AI = \frac{1}{2}CK$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

