

FONCTIONS - Généralités

Exercice1: Soit la fonction f définie par, $f(x) = 3x^2 - 1$

1) Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f .

Solution: 1) $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$2) f(x) = 2 \text{ ssi } 3x^2 - 1 = 2$$

$$\text{ssi } 3x^2 = 2 + 1 \text{ ssi } 3x^2 = 3 \text{ ssi } x^2 = 1$$

$$\text{ssi } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

Exercice2:

a. On considère la fonction définie par : $x \mapsto \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \mapsto \sqrt[3]{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Exercice3 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par :

$$1) f(x) = 3x^2 - x + 1.$$

$$2) f(x) = \frac{x^3}{2x-4}.$$

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}.$$

$$4) f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}.$$

$$5) f(x) = \sqrt{-3x+6}.$$

$$6) f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}.$$

$$7) f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}.$$

$$8) f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}.$$

$$9) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}.$$

$$10) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}.$$

$$11) f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}.$$

$$12) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}.$$

$$13) f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3}.$$

$$14) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}.$$

$$15) f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}.$$

$$16) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+4}.$$

$$17) f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}. \quad 18) f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}.$$

$$19) f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}. \quad 20) f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}}.$$

$$21) f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}.$$

Solutions

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$$

$$2x-4=0 \text{ ssi } x=\frac{4}{2}=2 \text{ Donc } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

$$3) f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ ssi } x^2 - 2^2 = 0 \text{ ssi } (x-2)(x+2) = 0$$

$$\text{ssi } x-2=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ssi } x=2 \text{ ou } x=-2 \text{ donc } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$4) f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\}$$

$$x^3 - 2x = 0 \text{ ssi } x(x^2 - 2) = 0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2 - 2 = 0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2 = 2 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2} \text{ donc } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$5) f(x) = \sqrt{-3x+6}.$$

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$

$$-3x+6 \geq 0 \text{ ssi } x \leq 2 \text{ ssi } x \leq \frac{-6}{-3} \text{ ssi } -3x \geq -6$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 2]$$

$$6) f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad a=2 \text{ et } b=-5 \text{ et } c=-3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(5)+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(5)-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$

7) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 \geq 0\}$ soit Δ son discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0 \quad a = 2$$

$$x_1 = \frac{-(3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(3)-\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0

Donc $D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\}$

$$-9x+3=0 \quad \text{ssi} \quad x=\frac{1}{3} \quad \text{ssi} \quad -9x=-3$$

$$x+1=0 \quad \text{ssi} \quad x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	+		+	0
$x+1$	-	0	+	
$\frac{-9x+3}{x+1}$	-		+	0

Donc $D_f = \left] -1, \frac{1}{3} \right]$

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + x + 3 > 0\}$

$$-2x^2 + x + 3 = 0 \quad a = -2 \quad \text{et} \quad b = 1 \quad \text{et} \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

Donc on a deux racines

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$
$-2x^2+x+3$	-	0	+	0

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2} \right]$

10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{ssi} \quad x^2 = -1$$

Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R}

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

16) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$

$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

17) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$ donc : $D_f =]-\infty, 0[$

18) $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \quad \text{ssi} \quad |2x-4| = |x-1|$$

$$\text{ssi} \quad 2x-4 = x-1 \quad \text{ou} \quad 2x-4 = -(x-1)$$

$$\text{ssi} \quad 2x-x = 4-1 \quad \text{ou} \quad 2x-4 = -x+1$$

$$\text{ssi} \quad x=3 \quad \text{ou} \quad 2x+x=4+1$$

$$\text{ssi} \quad x=3 \quad \text{ou} \quad 3x=5 \quad \text{ssi} \quad x=3 \quad \text{ou} \quad x=\frac{5}{3}$$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

19) $f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$

$$2 \cos x - 1 = 0 \quad \text{ssi} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc: $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

20) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 \neq 0 \right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$: Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On détermine les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-(1)-\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2' = \frac{-(1)+\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 13$	-	0	+	+	+	0
$x^2 - x - 6$	+		0	-	0	+
$\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}$	-	0	+	-	+	0

$$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right].$$

$$21) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0

$$\text{On a donc : } D_f = [-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty]$$

Exercice4: Soient les deux fonctions :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$$

Est-ce que $f=g$. ? justifier

Solution :

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$ donc $f(x) = g(x)$

donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et

$f(x) = g(x)$ donc : $f=g$.

Exercice5: Soient les deux fonctions :

$$h(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{et} \quad t(x) = x - 1$$

Est-ce que $f=g$. ? justifier

Solution :

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$

- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

alors $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

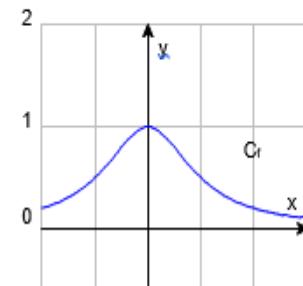
Exercice6: Tracer la représentation graphique de la fonction

$$f \text{ tq : } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{Sur } I \text{ un l'intervalle } I = [-2; 3]$$

Réponses :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exercice7: que représente la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)

Solution : la courbe représentative d'une fonction affine f est une droite d'équation $y = ax + b$

Exercice8: Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = |2x + 3|$

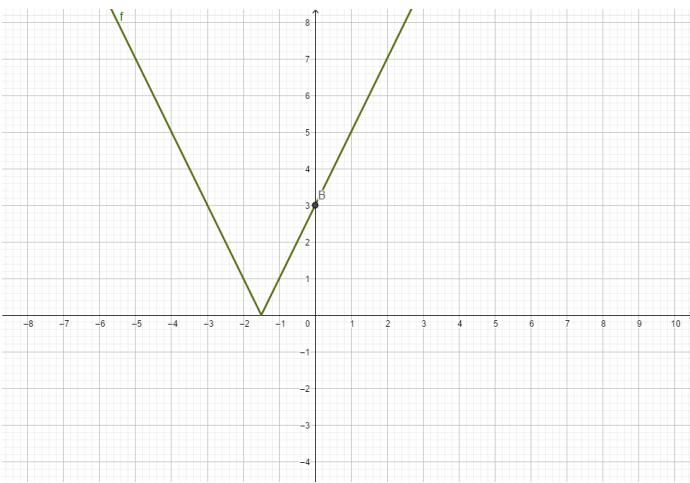
Solution : on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x + 3$	-	0
$ 2x + 3 $	-2x - 3	2x + 3

$$2x + 3 = 0 \quad \text{ssi} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x + 3 \text{ si } x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

$$f(x) = -2x - 3 \text{ si } x \in \left[-\infty, -\frac{3}{2} \right]$$



Exercice9: Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

Solution :

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

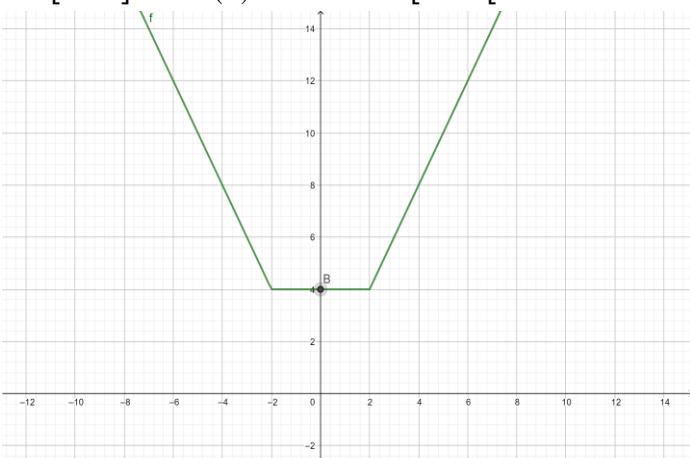
$$x+2=0 \text{ ssi } x=-2$$

$$x-2=0 \text{ ssi } x=2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$x+2$	-	0	+	+
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$ x-2 + x+2 $	$-2x$	4	$2x$	

Donc $f(x) = -2x$ si $x \in]-\infty, -2]$ et $f(x) = 4$ si

$x \in [-2, 2]$ et $f(x) = 2x$ si $x \in [2, +\infty[$



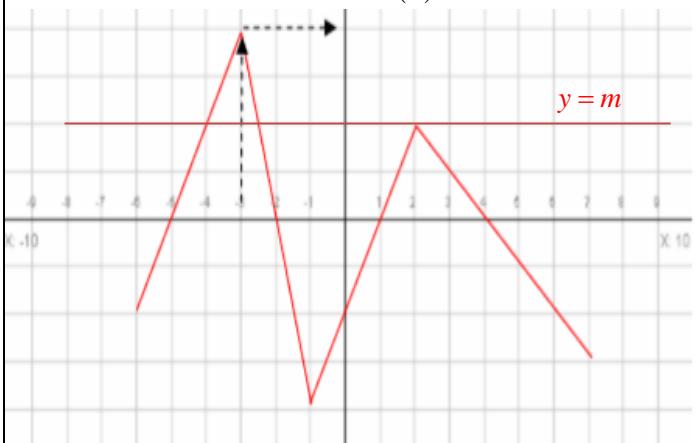
Exercice10: La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6; 7]$

Répondre par lecture graphique :

- 1- Quelles sont les images des réels $-5, -3, 0$ et 6 ?
- 2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
- 3- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
- 4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x) = m$

5- Résoudre graphiquement $f(x) < 0$

6- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$



Solution :

1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4

Image de 0 est -2 Image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : $-5,5$ $-1,75$ $0,5$ et 5

Antécédents de 0 sont : -5 -2 1 et 4

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :

$$S = \{-5; -2; 1; 4\}$$

4) Nombre de solutions de $f(x) = m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m .

Si $m < -4$: pas de solution

Si $m = -4$: une solution

Si $-4 < m < -3$ deux solutions

Si $-3 < m < -2$: trois solutions

Si $-2 < m < 2$: quatre solutions

Si $m = 2$: trois solutions

Si $2 < m < 4$ deux solutions

Si $m = 4$: une solution

Si $m > 4$: pas de solution

5) $f(x) < 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses.

$$S = [-6; 7] \cup]-2; 1[\cup]4; 7]$$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ donc $S = [-4; 2,5] \cup \{2\}$

Exercice11: étudier la parité des fonctions suivantes

$$1) f(x) = 3x^2 - 5 \quad 2) g(x) = \frac{3}{x} \quad 3) h(x) = 2x^3 + x^2$$

$$4) t(x) = \frac{x}{x-2}$$

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$

$f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \frac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

on a $-2 \in D_t$ mais $-(-2) = 2 \notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport à O

Donc t est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice12: Etudier la parité des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$ 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$.

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$. 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 - 1 = 0$ ssi $x^2 = 1$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\}$$

$1-x^2 = 0$ ssi $x^2 = 1$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0

Donc $D_f = [-1, 1]$

- Pour tout réel x , si $x \in [-1, 1]$, alors $-x \in [-1, 1]$

$$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$x^2 + 5 = 0$ ssi $x^2 = -5$ pas de solutions

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel x , donc $2x^2 + 4 \geq 0 + 4$ donc $2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$
- $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ Donc
 $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exercice13 : soient les fonctions définies par :

1) $f(x) = 7x - 5$ 2) $g(x) = \frac{2}{x}$

Etudier la monotonie de f et de g

Solutions :1) f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$ car $7 > 0$

Donc $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) < f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur \mathbb{R}

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ tq $x_1 < x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

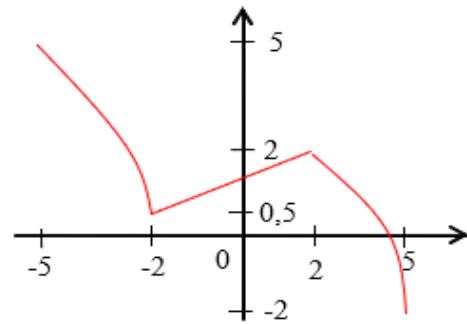
Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) **tableau de variation :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice14 :

Soit la fonction définie par la représentations graphique suivante sur l'intervalle : $[-5; 5]$



Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5; 5]$

Solutions

x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Exercice15 : Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

1) déterminer D_f

2) calculer le taux d'accroissement de fonction de f

Entre x_1 et x_2 tq $x_1 \neq x_2$

3) étudier les variations de f sur les intervalles $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 0]$

4) Dresser son tableau de variation de f

Solutions :1) f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 > 0$

$$\text{Donc } T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty; 0]$

4) résumé : tableau de variation : $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

Exercice16: Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

1) déterminer D_g

2) calculer le taux d'accroissement de fonction de g

Entre x_1 et x_2 tq $x_1 \neq x_2$

3) étudier les variations de g sur les intervalles $I =]-\infty; -1[$

et $J =]-1; +\infty[$

4) Dresser son tableau de variation de f

Solutions : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

1) on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$

on a : $T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3)a) sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 < -1$ et $x_2 < -1$ Donc $x_1 + 1 < 0$ et

$x_2 + 1 < 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) > 0$ Donc

$$T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \text{ sur } I =]-\infty; -1[$$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty; -1[$

b) sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > -1$ et $x_2 > -1$ Donc $x_1 + 1 > 0$ et

$x_2 + 1 > 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) > 0$ Donc

$$T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \text{ sur } J =]-1; +\infty[$$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1; +\infty[$

4) résumé : tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		2	

Exercice17: Soit f une fonction tq : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} - \\ f(-x) &= -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction impaire,

$$\begin{aligned} 2) f(x_1) - f(x_2) &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \end{aligned}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur $I =]0; 1]$

Soit $x_1 \in]0; 1]$ et $x_2 \in]0; 1]$

Donc $0 < x_1 \leq 1$ et $0 < x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 < 0$

Donc $0 < x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 - 1 < 0$ et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I =]0; 1]$

b) sur $J = [1; +\infty[$

Soit $x_1 \in [1; +\infty[$ et $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 > 1$ Donc $x_1 x_2 - 1 > 0$

et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J = [1; +\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I =]0; 1]$ est l'intervalle $I' = [-1; 0[$ et le symétrique de $J = [1; +\infty[$ est l'intervalle $J' =]-\infty; -1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I . Donc f est strictement décroissante sur I' .

f est strictement croissante sur J . Donc f est strictement croissante sur J' .

5) le tableau de variations de f sur D_f

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$		-2		2	

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

Exercice18 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = 5x^2 + 3$$

Montrer que $f(0) = 3$ est un minimum de f sur \mathbb{R}

Réponses: $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$. Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 > 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum de f sur \mathbb{R}

Exercice19 : Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -4x^2 + 1$$

Montrer que $g(0) = 1$ est un maximum de g sur \mathbb{R}

Réponses: Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -4x^2 + 1 \quad D_g = \mathbb{R}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 < 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \leq 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \leq g(0)$

d'où $g(0) = 1$ est un maximum de g sur \mathbb{R}

Exercice20 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) montrer que $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extréums de f sur \mathbb{R}

Réponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$$6 - (2x - 1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

$$\text{Donc : } f(x) = 6 - (2x - 1)^2$$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite $-(2x - 1)^2 \leq 0$ donc $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 6$

$$2^\circ \text{ on a } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$ alors

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \text{ est un maximum de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice21 : donner le tableau et représenter la courbe des fonctions numériques définies par :

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad 2) f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

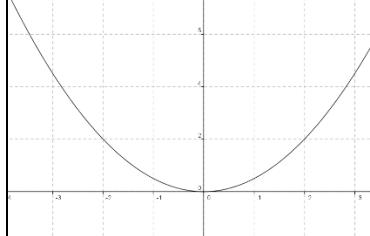
Réponses : 1) $D_f = \mathbb{R}$ et On a $a = \frac{1}{2} > 0$

Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

Représentation graphique :



2) Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

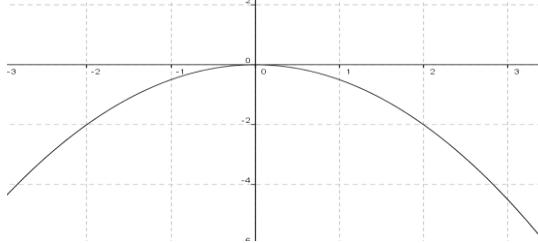
$D_f = \mathbb{R}$ et On a $a = -\frac{1}{2} < 0$

Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2

Représentation graphique :



Exercice22 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) déterminer D_f

2) déterminer α et β tel que : $f(x) = 2(x - \alpha)^2 + \beta$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$)
Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{32}{4 \times 2} = -4$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x - 1)^2 - 4$$

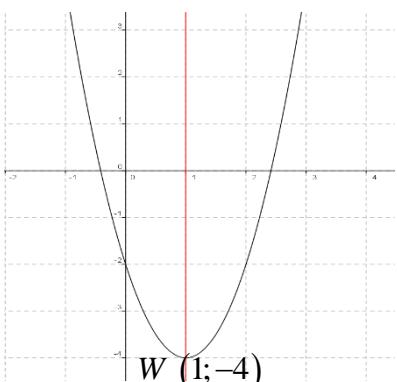
$$(f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

3) Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f : On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		-4	

4)



Exercice23 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) déterminer D_g

2) déterminer α et β tel que : $g(x) = -\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 + \beta$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de g

4) tracer la courbe représentative (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

2) On a $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$ et $c = 1$ ($g(x) = ax^2 + bx + c$)

$$\text{Donc } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times -\frac{1}{2}} = 2 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{4 \times -\frac{1}{2}} = -2$$

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$g(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$

$$\left(g(2) = -\frac{1}{2}(2 - 2)^2 + 3 = 3 \right)$$

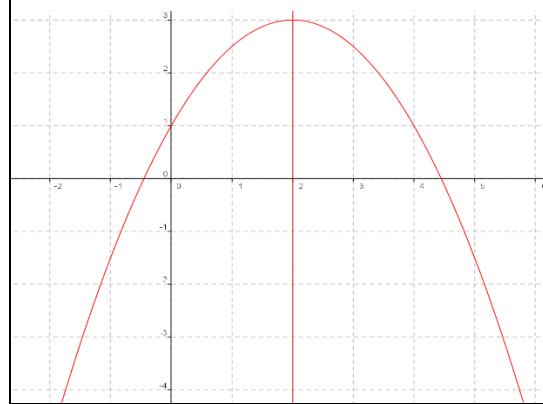
3) Soit $W(2; 3)$ Donc dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2; 3)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 2$

Tableau de variations de f

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		3	

4)



Exercice24 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4} \text{ et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; \vec{i}; \vec{j})$$

1) déterminer D_f

$$2) \text{ déterminer } \alpha \text{ et } \beta \text{ et } k \text{ tel que : } f(x) = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4}$$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $2x-4 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

$$\begin{array}{r} -2x+1 \\ -2x+4 \\ \hline -3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x-4 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-(2x-4)-3}{2x-4} = \frac{-(2x-4)}{2x-4} + \frac{-3}{2x-4} = -1 + \frac{-3}{2x-4}$$

$$3) f(x)+1 = \frac{-3}{2x-4}$$

On pose $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ et soit $W(2; -1)$

• Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation de (C_f) est

$Y = \frac{-3}{X}$ avec $Y = y+1$ et $X = x-2$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites

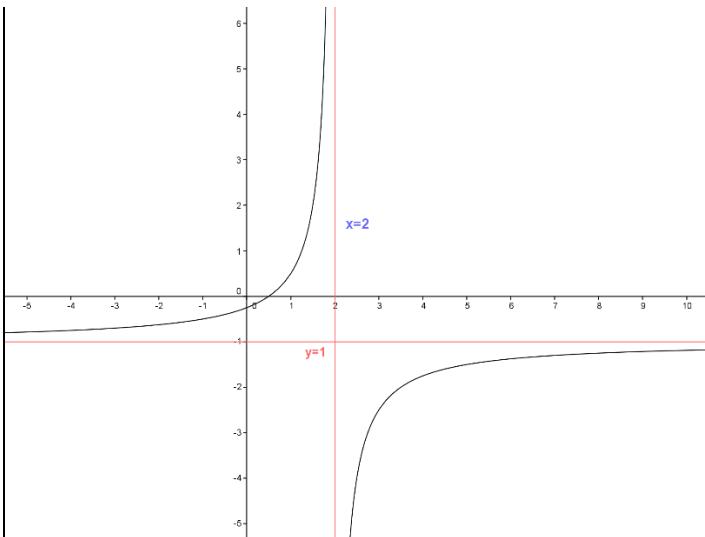
2) d'équations respectives $x = 2$ et $y = -1$

• Tableau de variations $X \longrightarrow \frac{-3}{X} \left(\frac{-3}{2} < 0 \right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

4)

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exercice25 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; \vec{i}; \vec{j})$$

1) déterminer D_f

$$2) \text{ déterminer } \alpha \text{ et } \beta \text{ et } k \text{ tel que : } f(x) = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a :

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ -2x+2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$3) f(x)-2 = \frac{3}{x-1} \text{ ssi } y-2 = \frac{3}{x-1}$$

On pose $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \text{ ssi } Y = \frac{3}{X}$$

• Tableau de variations de $X \longrightarrow \frac{3}{X} (3 > 0)$

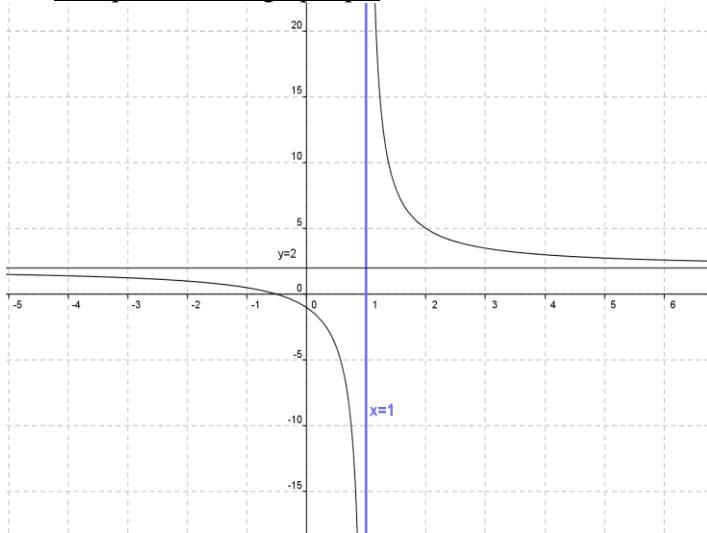
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de x $\longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

4) Représentation graphique



Exercice 26 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} \quad \text{et } (C_g) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; \vec{i}; \vec{j})$$

1) déterminer D_g

2) déterminer α et β et k tel que : $g(x) = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de g

4) tracer la courbe représentative (C_g)

Solution : 1) $g(x) = \frac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

$$\begin{array}{c|c} -x & | x-2 \\ \hline x-2 & | -1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} = \frac{-1(x-2)-2}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = -1 + \frac{-2}{x-2}$$

3) $g(x)+1 = \frac{-2}{x-2}$ ssi $y+1 = \frac{-2}{x-2}$

On pose $\begin{cases} x-2=X \\ y+1=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y-1 \end{cases}$

$$y = \frac{-x}{x-2} \text{ ssi } Y = \frac{-2}{X}$$

- Tableau de variations de X $\longrightarrow \frac{-2}{X} (-2 < 0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

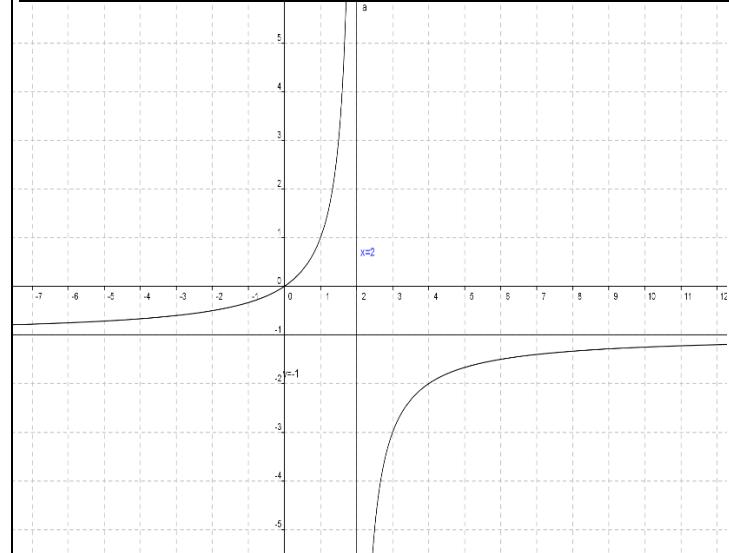
On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de x $\longrightarrow \frac{-x}{x-2}$

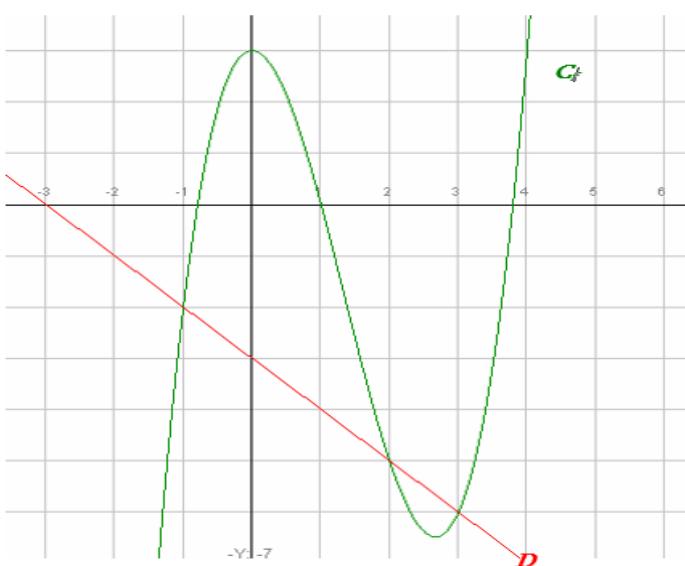
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

4) Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3



Exercice27: Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$



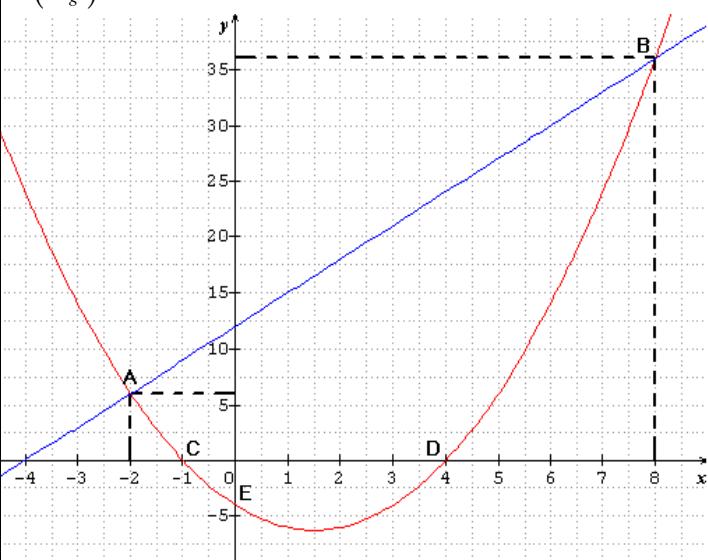
- 1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$
- 2- puis l'inéquation $f(x) < 3$.
- 3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$
- 4- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0; 4\}$
 2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{a; b\}$ Avec $-1 < a < -0.5$ et $3.5 < b < 4$
 $f(x) \geq 0$ $S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$
 3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y = -x - 3$ donc $S = \{-1; 2; 3\}$
 $f(x) \leq -x - 3$ $S =]-\infty; -1] \cup [2; 3]$

Exercice28 : Soient f et g les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

- 1) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
- 2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
- 4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$
 Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2; 8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 = 3x + 12$ ssi

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a=1 \text{ et } b=-6 \text{ et } c=-16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

donc $S = \{-2; 8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si

$$x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

$f(x) > g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 > 3x + 12$ ssi

$$x^2 - 6x - 16 > 0$$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$	+	0	-	0

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -3 \text{ et } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$$C(-1; 0) \text{ et } D(4; 0)$$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{et on a } f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4; 0)$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

Que l'on devient un mathématicien

