

Correction :

Exercice 1:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

1. a) On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

b) Pour déterminer les antécédents de $\frac{4}{3}$ il suffit de résoudre l'équation $f(x) = \frac{4}{3}$

$$\text{On a } \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6x = 4x^2 - 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\text{et } \Delta = 25 \text{ donc les antécédents de } \frac{4}{3} \text{ sont } x = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2} \text{ ou } x = \frac{3+5}{4} = 2$$

2. On a $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ donc symétrique par rapport à 0

$$\text{et } f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -f(x) \text{ donc } f \text{ est impaire (car } (-x)^2 = x^2)$$

3. a) Pour x et y deux éléments distincts de D_f on a

$$T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2y}{y^2 - 1}}{x - y} = \frac{2x(y - 1) - 2y(x - 1)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{-2xy(x - y) - 2(x - y)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)} = \frac{-2xy - 2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}$$

b) Sur l'intervalle $[0; 1[$ on a $0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$ donc $-1 \leq y^2 - 1 < 0$, $-1 \leq x^2 - 1 < 0$ et $-4 < -2xy - 2 \leq -2$ donc $T < 0$ d'où f est décroissante sur $[0; 1[$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ on a $1 < x$ et $1 < y$ donc $x^2 - 1 > 0$, $y^2 - 1 > 0$ et $-2xy - 2 < -4$ donc $T < 0$ d'où f est décroissante sur $]1; +\infty[$

c) On a f est impaire et décroissante sur $]1; +\infty[$ donc décroissante sur $]-\infty; 1[$
 f est impaire et décroissante sur $[0; 1[$ donc décroissante sur $]-1; 0]$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$			0		

Exercice 2:

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - |x + 2| + |x - 2|$

1. On a $D_f = \mathbb{R}$ donc symétrique par rapport à 0

$$\text{et } f(-x) = -x - |-x + 2| + |-x - 2| = -x - |x - 2| + |x + 2| = -(x + |x - 2| - |x + 2|) = -f(x)$$

$$\text{car } |-x + 2| = |x - 2| \text{ et } |-x - 2| = |x + 2|$$

donc f est impaire.

2. On a

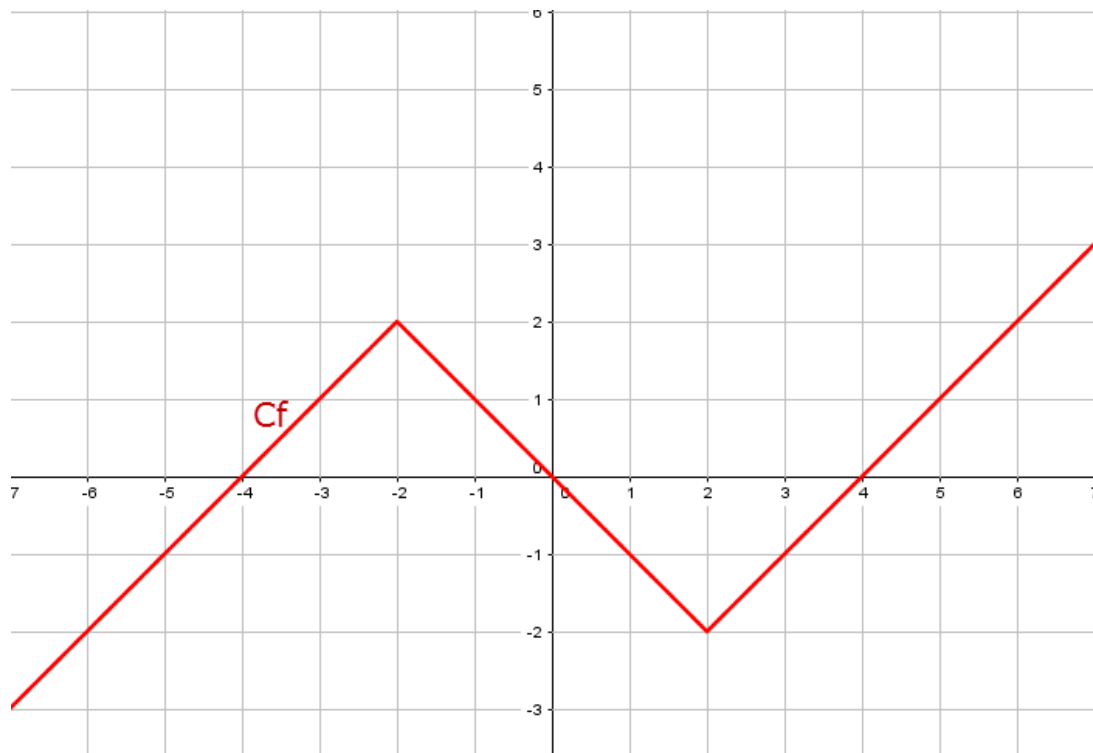
$$\begin{cases} f(x) = x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = -x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ f(x) = x - 4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$ x-2 $	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$x- x+2 + x-2 $	$x+4$	$-x$	$x-4$	

3. Sur $]-\infty; 2]$ on a C_f est une demi-droite d'équation $y = x + 4$

Sur $[-2; 2]$ on a C_f est un segment d'équation $y = -x$

Sur $[2; +\infty[$ on a C_f est une demi-droite d'équation $y = x - 4$



4. Tableau des variations de f .

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Variations de $f(x)$		$\nearrow 2$	$\searrow -2$	\nearrow

5. Les extrémums de la fonction f

2 est la valeur maximale de f sur l'intervalle $]-\infty; 2]$

-2 est la valeur minimale de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$

Exercice 3:

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ et $g(x) = \frac{-x+3}{x-2}$

1. a) Pour x et y deux éléments distincts de D_g on a

$$T = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{\frac{-x+3}{x-2} - \frac{-y+3}{y-2}}{x - y} = \frac{(-x+3)(y-2) - (-y+3)(x-2)}{(x-2)(y-2)(x-y)} = \frac{-x+y}{(x-2)(y-2)(x-y)} = \frac{-1}{(x-2)(y-2)}$$

Sur l'intervalle $]-\infty; 2[$ on a $x < 2$ et $y < 2$ donc $x-2 < 0$ et $y-2 < 0$ d'où $T < 0$
donc g est décroissante sur $]-\infty; 2[$

Sur l'intervalle $]2; +\infty[$ on a $x > 2$ et $y > 2$ donc $x-2 > 0$ et $y-2 > 0$ d'où $T < 0$
donc g est décroissante sur $]2; +\infty[$

b) Le tableau des variations de g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

La courbe C_g est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(2; -1)$ et d'asymptote $x = 2$ et $y = -1$

2. a) L'expression canonique de $f(x)$

On a $f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 1) = -(x-2)^2 - 1$ (On complète l'identité)

On sait que $-(x-2)^2 \leq 0$ donc $-(x-2)^2 - 1 \leq -1$ d'où $f(x) \leq -1$ et puisque $f(2) = -1$
donc -1 est la valeur maximale de f sur \mathbb{R}

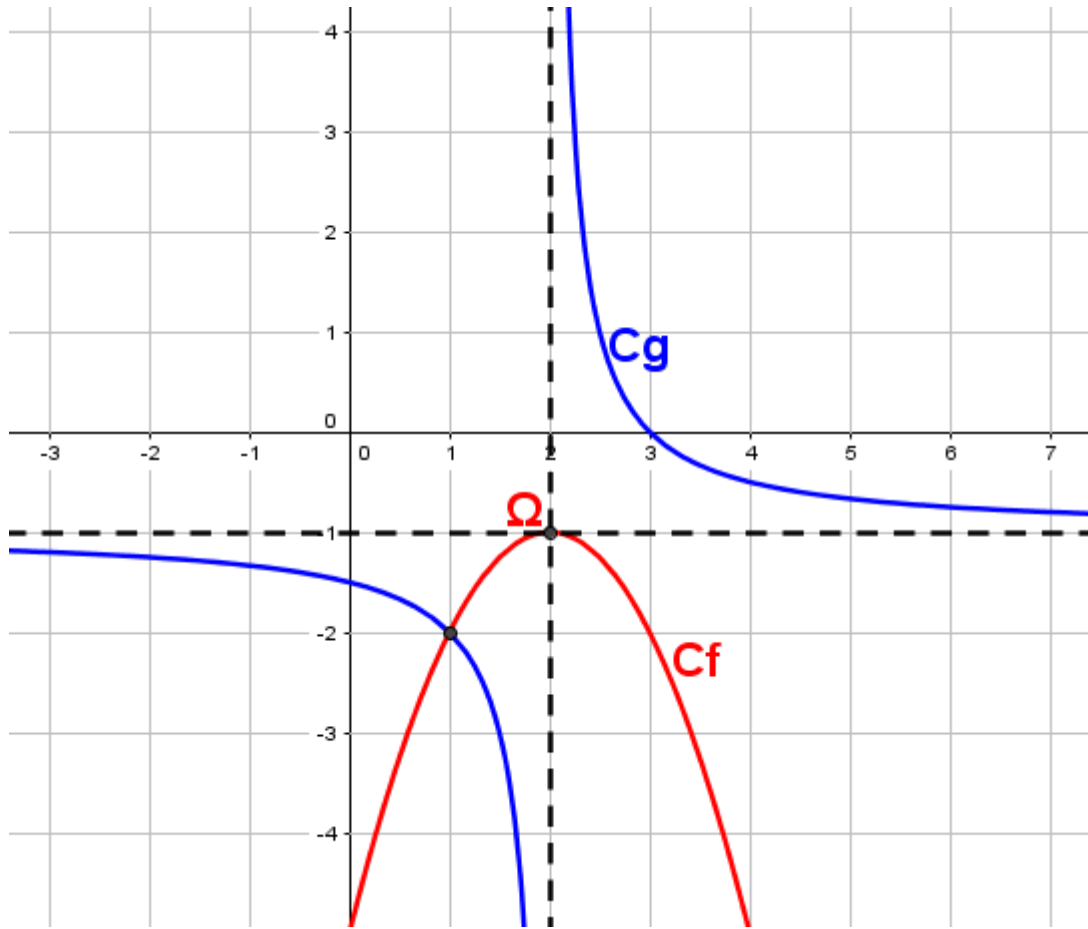
b) Le tableau des variations de f

f est un polynôme du second degré avec $a < 0$ donc C_f est une parabole de sommet $\Omega(2; -1)$

C_f est ouverte vers le bas

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-1	

3. Construire dans le même repère les deux courbes C_f et C_g



4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

On cherche les intervalles où C_f est en dessous de C_g

D'après la figure l'ensemble des solutions est $S =]-\infty; 1] \cup]2; +\infty[$