

FONCTIONS - Généralités

1) Définitions et Domaine de définitions

a°) Définition : Une fonction est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un

nombre y : On note : $x \xrightarrow{f} y$ ou encore $f : x \mapsto y$

Ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

b°) Domaine de définitions : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f , que l'on notera D_f

2) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

a) Egalité de deux fonctions : Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs. On dit que f et g sont égaux et on écrit $f=g$, si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout :

$x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a $f(x)=g(x)$

b) Représentations graphique

Soit f une fonction , et D_f son domaine de définition l'ensemble des points $M(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f , souvent notée C_f .

$$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$$

3) Fonctions paires et Fonctions impaires

a) Fonction paire : On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

- si Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

- Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = f(x)$

b) Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- si Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

- Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = -f(x)$

c) le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.

- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

4) Les variations d'une fonction numérique

1) Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$
($f(x_1) \leq f(x_2)$)

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$
($f(x_1) \geq f(x_2)$)

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

- On dit que f est constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

• On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$

et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ (

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0)$$

• On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$

et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

c) les variations et la parité :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle

$I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

• f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'

• f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

• f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'

• f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses

variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

5) Les extremums d'une fonction numérique

1) Définitions : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout $x \in I : f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I : f(x) \geq f(a)$

6) Etude et représentation graphique des fonctions

$$x \xrightarrow{f} ax^2$$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$ et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

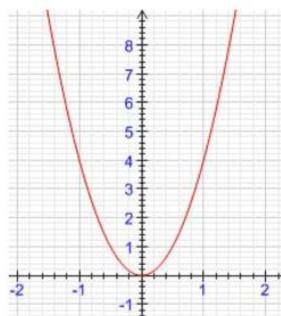
Tableau de variations de f si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

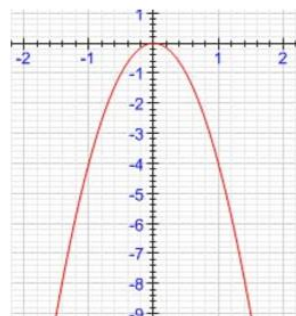
dans un Repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe

représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si $a > 0$



Si $a < 0$



7) Etude et représentation graphique des fonctions

$$x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

3° Les variations de f

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

8) Etude et représentation graphique des fonctions :

$$x \xrightarrow{f} \frac{a}{x} \quad (a \in \mathbb{R}^*) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*$$

a) Tableau de variations de f

si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

si $a < 0$

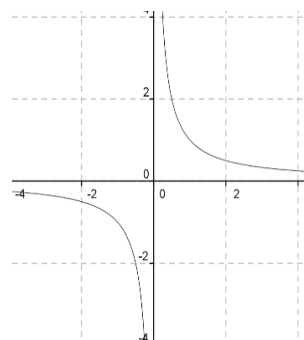
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole

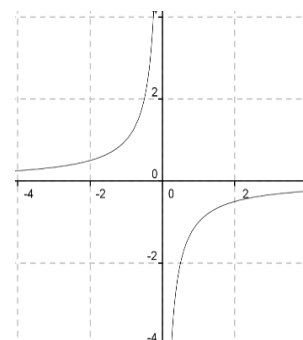
c) Les éléments caractéristiques sont :

- son centre de symétrie est l'origine du repère
- ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a > 0$



si $a < 0$



9) Etude et représentation graphique des fonctions

$$\text{homographique : } x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d} \quad a \neq 0 \text{ et } c \neq 0 \text{ et}$$

$$ad - bc \neq 0$$

f est une fonction homographique

• Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ on a $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x - \alpha}$

dite forme réduite de $f(x)$

• Soit $W(\alpha; \beta)$ Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y = \frac{y}{X}$ avec $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

• dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $y = \beta$

1^{ier} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

2^{ier} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

10) Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s).

a) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

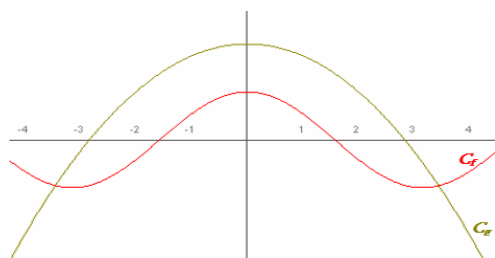
On peut établir les relations suivantes :

$M(x; y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$

$M(x; y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g) , on a

$M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc : soit $f(x) = g(x)$

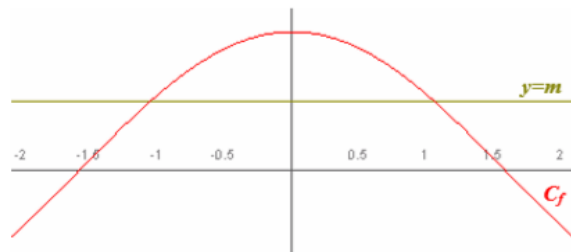


• les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g)

• les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g)

• les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g)

b) équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$



• Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$

• Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien