

I. Généralités sur les fonctions numériques :

A. Fonction numérique d'une variable numérique :

a. Préambule :

♣ Activité 1:

Une tortue se déplace avec une mouvement uniforme tel que 4 cm par minute .

1. Compléter le tableau suivant pour connaître la distance parcourue en cm après l'écoulement du temps qui est exprimée en minute .

Le temps t (en minute)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	x	
La distance d (en centimètre)								

♣ Vocabulaire :

- La relation qui nous permet à lier chaque élément x de $\mathbb{R}^+$ par un seul élément de $y \in \mathbb{R}^+$ qui tel que $y = 4x$ est appelée **fonction numérique de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$** , on la note par f ou g ou h ...
- on résume le tout par : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto f(x) = 4x$
- x est la variable .
- x est lié par $f(x) = 4x$ on dit que :
 - ✓ $y = f(x)$ est l'image de x par f .
 - ✓ x est un antécédent de y par f
- Si l'image de x existe on dit que la fonction f est définie en x . (par exemple -5 n'a pas d'image)
- Tous les réels x qui ont images par la **fonction f** constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition , on le note par **D ou D_f** . pour l'activité on a : $D_f = \mathbb{R}^+$.
- $x \in D_f$ équivaut à $f(x) \in \mathbb{R}$.
- A est un ensemble inclus dans D_f ($A \subset D_f$) , on dit que la fonction f est définie sur A .

b. Exemples :

On détermine l'ensemble de définition de chaque fonction suivante .

➤ $f(x) = \frac{1}{x}$.

on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$ ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

➤ $f(x) = \sqrt{x}$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$ ou $D_f = [0, +\infty[$.

➤ $f(x) = 2x$.



on a : la fonction f est une fonction polynomiale donc il définie pour x de $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty, +\infty[$.

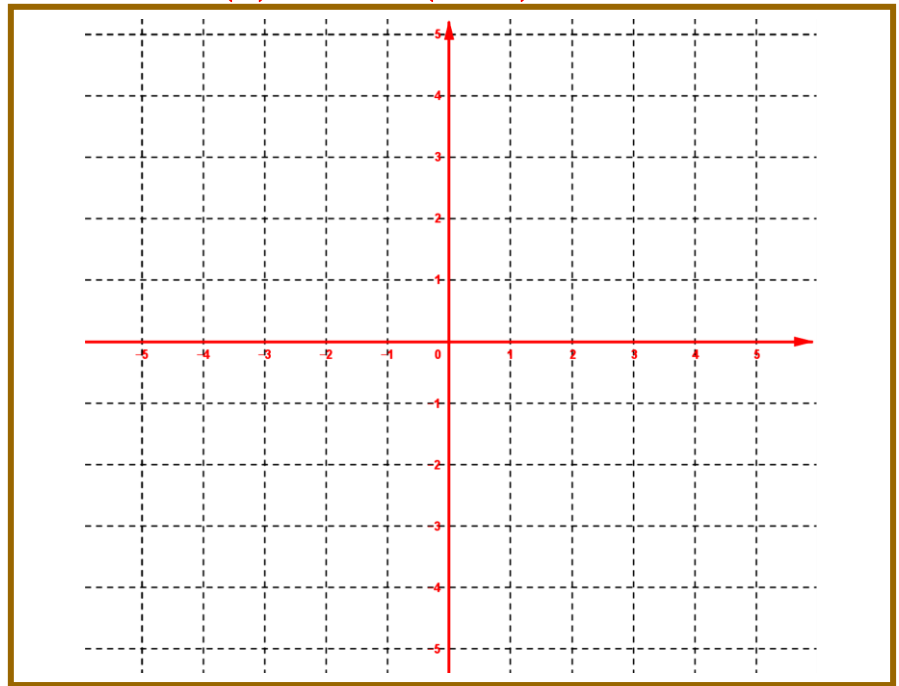
B. La représentation graphique (ou la courbe représentative) d'une fonction numérique :

a. Activité :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = 2x$.

Le plan (P) est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on général le repère est orthonormé).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Construire quelques points de (P) tel que $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.



b. Vocabulaire :

Le dessin obtenue s'appelle la représentation graphique de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou la courbe de la fonction f) on note (C_f) .

c. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f ($D_f \subset \mathbb{R}$).

Le plan (P) est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle courbe représentative de la fonction f , notée (C_f) , l'ensemble des points M de (P) de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D_f$.

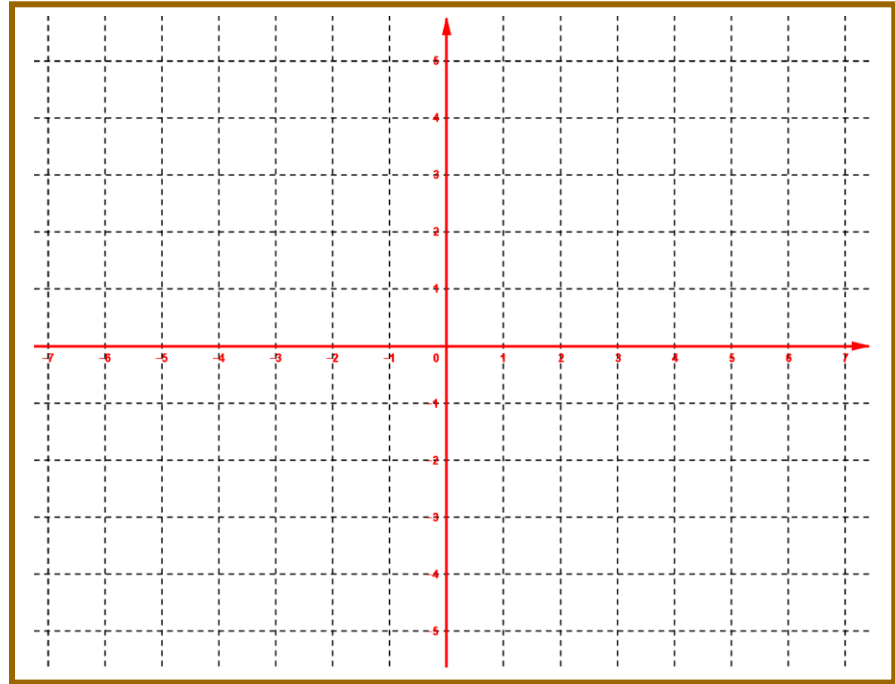
Un point $M(x, y) \in (C_f)$ équivaut à $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

La relation : $y = f(x)$ s'appelle équation cartésienne de la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



d. Exemple :

Construire la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x$



C. Egalité de deux fonctions :

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 2x$ et $g(x) = x + |x|$.

1. Simplifier l'écriture de la fonction g .
2. Quelle remarque peut-on donner ?

b. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .

On dit que les deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- ❖ $D_f = D_g$.
- ❖ Pour tout x de D_f on a : $f(x) = g(x)$
- ❖ Dans ce cas on écrit : $f = g$

c. Remarque :

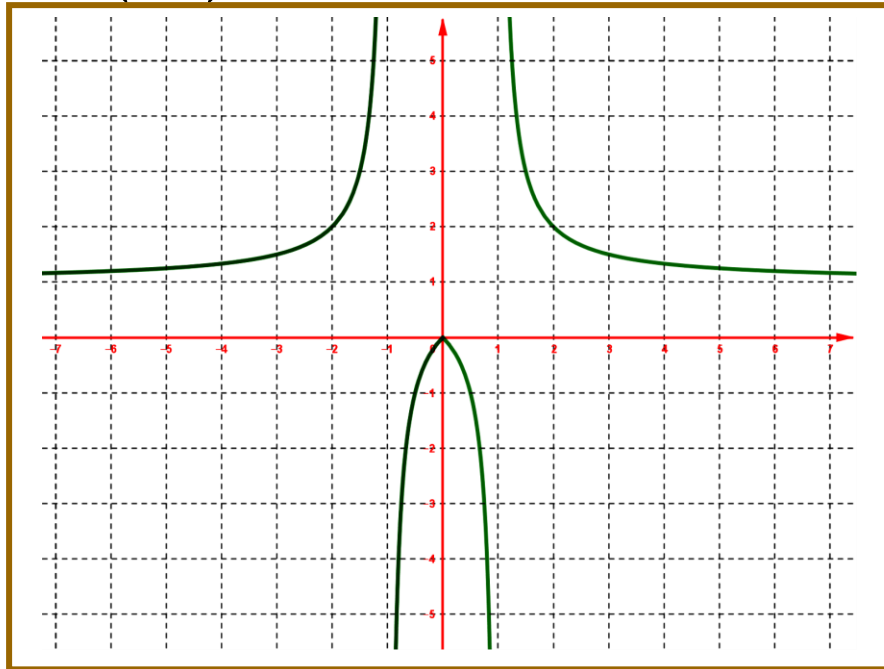
Si $f = g$ on a : les courbes (C_f) et (C_g) de f et g sont confondues.

II. Fonction paire – fonction impaire :

A. Fonction paire :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. La courbe (C_f) représente une fonction paire, quelles remarques peut-on donner ?

2. Donner la définition d'une fonction paire .

b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

On dit que f est une fonction paire sur D_f si et seulement si : pour tout x de D_f on a :

- ✓ Aussi $-x$ est un élément de D_f .
- ✓ $f(-x) = f(x)$ (c.à.d. $-x$ et x ont même image)

c. Remarque :

- la courbe d'une fonction f paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si la fonction f est paire sur D_f il suffit de connaître la partie de la courbe (C_f) tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de $\mathbb{R}^+$ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E .
- On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 3x^2 + 5$.

1. On détermine l'ensemble de définition f .

La fonction f est une fonction polynômiale donc définie pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?).

▪ On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.

▪ Soit x de $\mathbb{R}$: on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(-x) = f(x)$.

Conclusion : La fonction f est une fonction est paire.

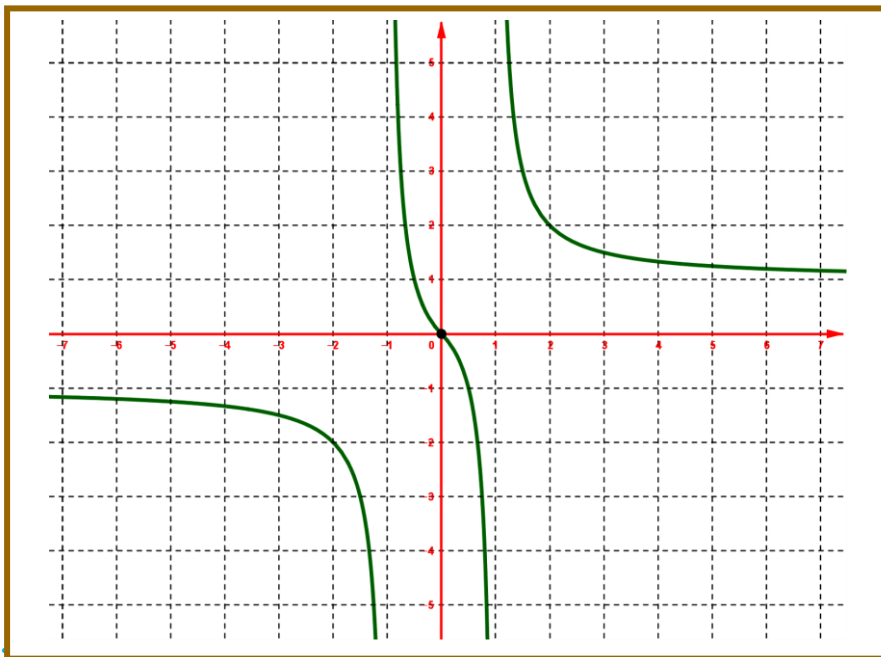
B. Fonction impaire :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. La courbe (C_f) représente une fonction impaire, quelles remarques peut-on donner ?

2. Donner la définition d'une fonction impaire.



b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

On dit que f est une fonction impaire sur D_f si et seulement si : pour tout x de D_f on a :

✓ Aussi $-x$ est un élément de D_f .

✓ $f(-x) = -f(x)$ (c.à.d. $-x$ et x ont des images opposées)



c. Remarque :

- la courbe d'une fonction f impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si la fonction f est impaire sur D_f il suffit de connaître la partie de la courbe (C_f) tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de $\mathbb{R}^+$ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E .
- On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 7x^3 + 2x$.

1. On détermine l'ensemble de définition f .

La fonction f est une fonction polynômiale donc définie pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?).

- On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.

- Soit x de $\mathbb{R}$: on a :

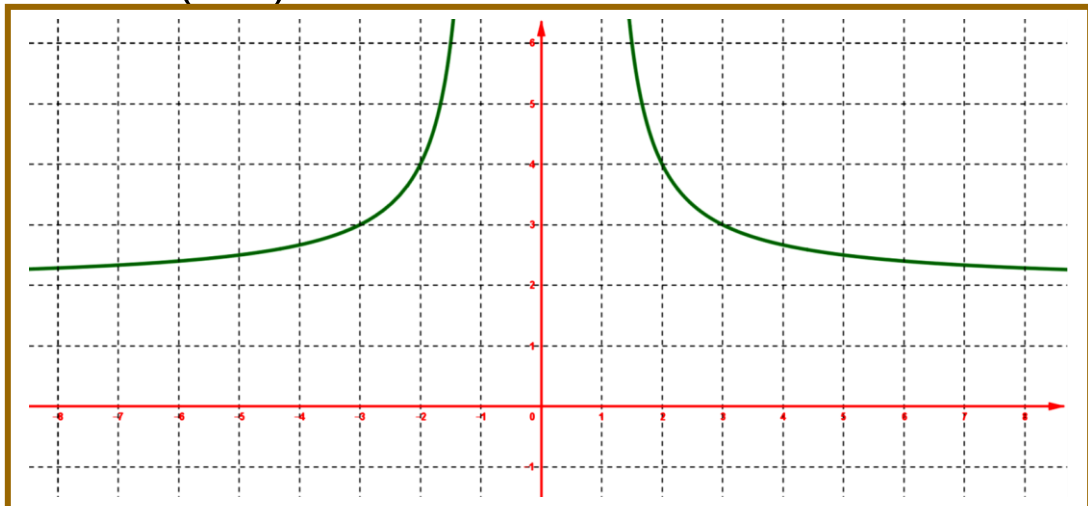
$$\begin{aligned} f(-x) &= 7(-x)^3 + 2(-x) \\ &= -7x^3 - 2x, \quad ((-x)^3 = -x^3) \\ &= -(7x^3 + 2x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(-x) = -f(x)$. **Conclusion :** La fonction f est une fonction est impaire.

III. Sens de variation d'une fonction :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.





1. La courbe (C_f) représente une fonction .

- strictement croissante sur l'intervalle $[-5, -2]$, quelles remarques peut-on donner ?
- strictement décroissante sur l'intervalle $[3, 6]$, quelles remarques peut-on donner ?

2. Donner la définition d'une fonction strictement croissante puis d'une fonction strictement décroissante .

b. Définitions :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f ($I \subset D_f$) .

- ❖ On dit que f est une fonction croissante ou bien si et seulement si :
pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$. (le sens de l'inégalité ne change pas)
- ❖ On dit que f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si :
pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$. (le sens de l'inégalité ne change pas)
- ❖ On dit que f est une fonction décroissante sur l'intervalle I si et seulement si :
pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \geq f(x')$. (le sens de l'inégalité change)
- ❖ On dit que f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si :
pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$. (le sens de l'inégalité change)
- ❖ On dit que f est une fonction constante sur l'intervalle I si et seulement si :
pour tous x et x' de I on a : $f(x) = f(x')$

c. Remarque :

- ❖ la fonction f est strictement croissante on utilise la flèche suivante  .
- ❖ la fonction f est strictement décroissante on utilise la flèche suivante  .
- ❖ Si la fonction f est croissante ou bien décroissante sur l'intervalle I on dit que f est monotone sur I .
- ❖ Si la fonction f est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur l'intervalle I on dit que f est strictement monotone sur I .
- ❖ Déterminer les variations d'une fonction c'est de rechercher les intervalles sur lesquelles la fonction f est strictement monotone ou constante .
- ❖ On résume : l'ensemble de définition de la fonction f et les variations de la fonction f par un tableau , appelé tableau de variation de f .

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.



1. On détermine l'ensemble de définition f .

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. (car f est une fonction polynômiale).

2. Etudier les variations de f sur $D_f = \mathbb{R}$, puis on donne le tableau de variation de la fonction f .

❖ On étudie la monotonie de f .

Soient x et x' de $\mathbb{R}$ tel que $x < x'$

$x < x'$ alors $5x < 5x'$ (on multiplier les deux membres de l'inégalité par 5)

Alors $5x - 3 < 5x' - 3$.

Alors $f(x) < f(x')$.

Conclusion : la fonction f est strictement croissants sur $\mathbb{R}$.

❖ On donne le tableau de variation de f .

Ensemble de définition $\rightarrow$	x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f \rightarrow$	$f(x)$	$\nearrow$	

IV. Taux d'accroissement d'une fonction :

a. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f ($I \subset D_f$) .

Soient x et x' de I tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ est appelé le taux d'accroissement

de la fonction f entre x et x' , on note T_f d'où $T_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

b. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f sur $D_f = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soient } x \text{ et } x' \text{ de } I \text{ tel que } x \neq x', \text{ on a : } T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\
 &= \frac{5x - 3 - (5x' - 3)}{x - x'} \\
 &= \frac{5x - 3 - 5x' + 3}{x - x'} \\
 &= \frac{5(x - x')}{x - x'} = 5
 \end{aligned}$$

Conclusion : le taux d'accroissement de la fonction f est $T_f = 5$.

c. Propriété :

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur un intervalle I .

- ❖ Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I .
- ❖ Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I .
- ❖ Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur l'intervalle I .

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.

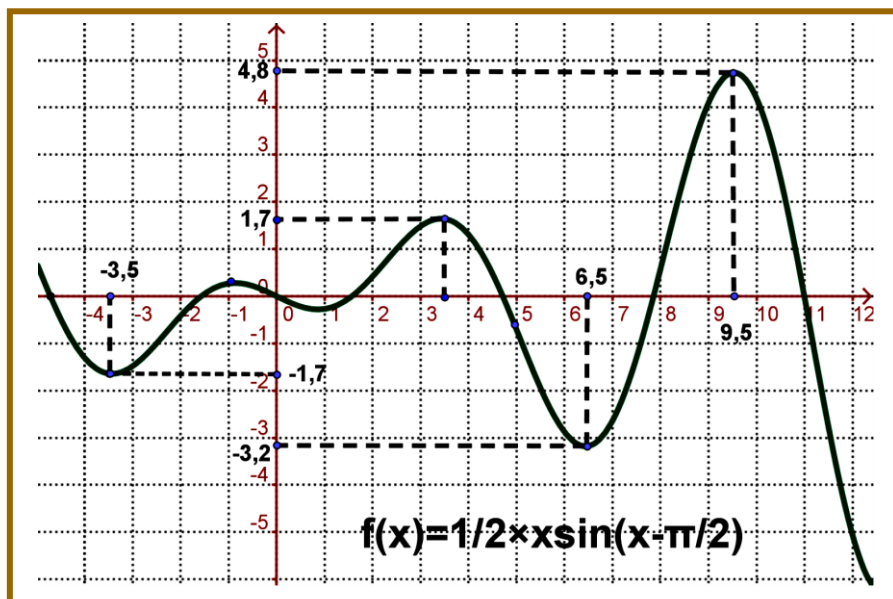
1. Déterminer la monotonie de la fonction f .

D'après l'exemple précédent on a : $T_f = 5 > 0$ d'où la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

V. Extremums d'une fonction :A. Valeurs maximales valeurs minimales d'une fonction sur un intervalle I :a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- On dit que $1,7$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[2,4]$ ou $]0,7[$
- On dit que $9,5$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[8,11]$ ou $]-4,10]$
- 1. Quelle définition peut-on donner sur valeurs **maximales**.
- On dit que $-1,7$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[-4,-2]$ ou $[-4,3]$
- On dit que $6,5$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[3,8]$ ou $[-4,10[$
- 2. Quelle définition peut-on donner sur valeurs **minimales**.



b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f ($I \subset D_f$), $a \in I$.

- /// $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(x) \leq f(a)$.
- /// $f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(a) \leq f(x)$.

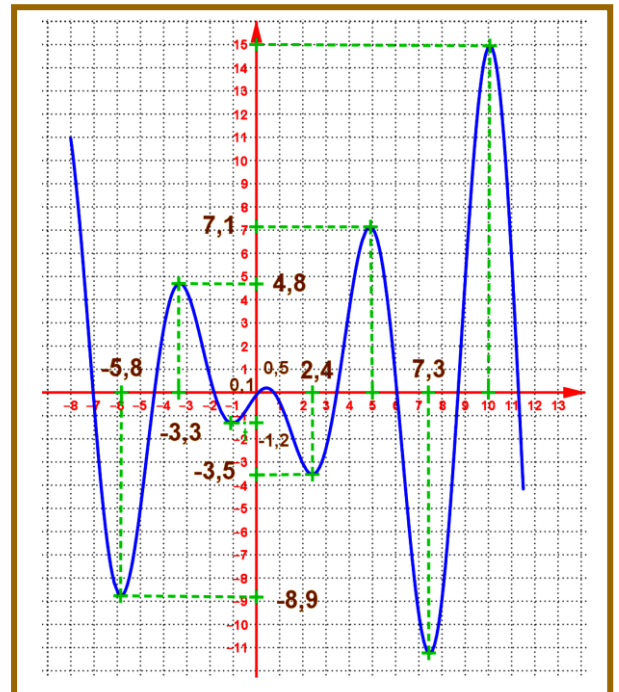
c. Remarque :

- /// $f(a)$ est un extrémum de la fonction f signifie que $f(a)$ est une valeur maximale ou bien $f(a)$ est une valeur minimale de f .
- /// On dit aussi que la fonction f admet une valeur maximale en a .
- /// On dit aussi que la fonction f admet une valeur minimale en a .
- /// Si $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur maximale absolue de f . (si non on dit que $f(a)$ est une valeur maximale relative)
- /// Si $f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur minimale absolue de f . (si non on dit que $f(a)$ est une valeur minimale relative)

d. Exercice :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les extremums de f sur
 - $[4, 11]$; $[-8; 9]$; $[-5; 3]$

**VI. Etude de certaines fonctions :**

A. Fonction $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

a. Activité :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$) .

1. On détermine l'ensemble de définition f .

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. (car f est une fonction polynômiale).

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?).

- On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.
- Soit x de $\mathbb{R}$: on a : $f(-x) = a(-x)^2$

$$= ax^2$$

$$= f(x)$$

D'où : $f(-x) = f(x)$.

Conclusion : La fonction f est une fonction est paire sur $D_f = \mathbb{R}$.

3. On déduit l'ensemble d'étude de f .

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Conclusion : domaine d'étude de f est $D_E = [0, +\infty[$.

4. Calculer le taux d'accroissements de f sur D_E et on déduit les variations de f sur D_E puis sur D_f .

Soient x et x' de $D_E = [0, +\infty[$ tel que $x \neq x'$, on a :
$$T_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$

$$= \frac{ax^2 - ax'^2}{x - x'}$$

$$= \frac{a(x - x')(x + x')}{x - x'} = a(x + x')$$

Donc : $T_f = a(x + x')$ puisque x et x' de $D_E = [0, +\infty[$ donc $x + x' \geq 0$ et on a $x \neq x'$ au moins un des nombres x et x' est non nul d'où $x + x' > 0$.

1^{er} cas : $a > 0$ car $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

On a $a > 0$ et $x + x' > 0$ donc $a(x + x') > 0$ d'où $T_f > 0$.

Conclusion 1 :

- la fonction f est strictement croissante sur $D_E = [0, +\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ car la fonction est paire(la fonction ne varie pas dans le même sens .

2^{ème} cas : $a < 0$ car $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

On a $a < 0$ et $x + x' > 0$ donc $a(x + x') < 0$ d'où $T_f < 0$.

Conclusion 2 :

- la fonction f est strictement décroissante sur $D_E = [0, +\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ car la fonction est paire (la fonction ne varie pas dans le même sens .

b. propriété :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2$; ($a \in \mathbb{R}^*$) .

❖ la fonction f est paire sur $D_f = \mathbb{R}$.

❖ La monotonie de la fonction f est :

• 1^{er} cas $a > 0$:

la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

• 2^{ème} cas $a < 0$:

la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

❖ le tableau de variation est :

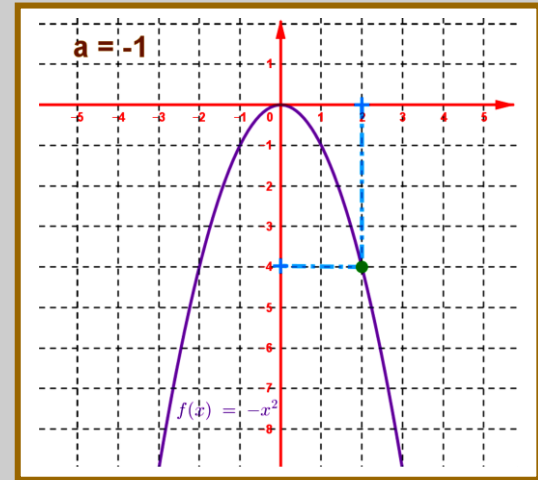
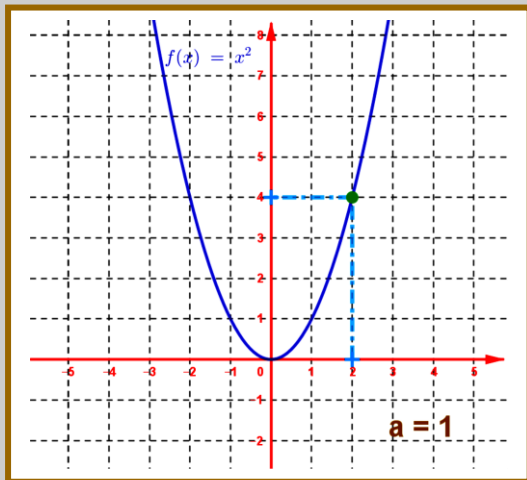
• 1^{er} cas $a > 0$:

$a > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

• 2^{ème} cas $a < 0$:

$a < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

❖ La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



❖ La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole , de sommet l'origine O (du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) , d'axe de symétrie l'axe des ordonnées (la droite d'équation $(D) : x = 0$) .

c. Exemple :

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

On a : $a = \frac{1}{2}$ d'où le tableau de variations de f est :

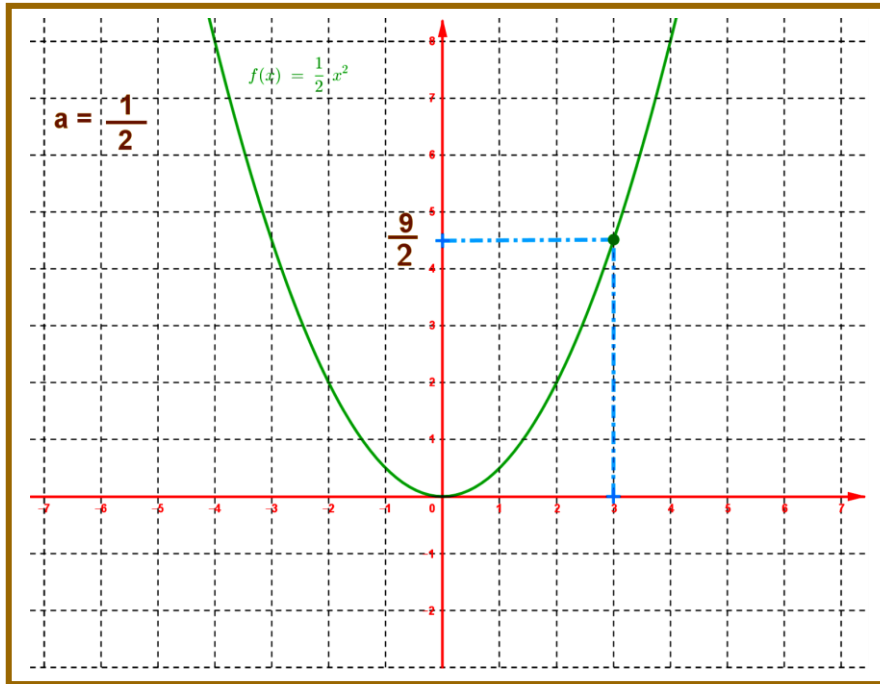
$a = \frac{1}{2} > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

2. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{9}{2}$	...

La courbe représentative : (on oublie pas que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$)



B. Fonction $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$)

a. Activité :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$) .

1. On détermine l'ensemble de définition f .

$x \in D_f$ est équivalent à $x \neq 0$

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. (car f est une fonction rationnelle).

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?) .

▪ On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}^*$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}^*$.

▪ Soit x de $\mathbb{R}^*$: on a : $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$

D'où : $f(-x) = -f(x)$.

Conclusion : La fonction f est une fonction est impaire sur $D_f = \mathbb{R}^*$.



3. On déduit l'ensemble d'étude de f .

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$.

Conclusion : domaine d'étude de f est $D_E =]0, +\infty[$.

4. Calculer le taux d'accroissements de f sur D_E et on déduit les variations de f sur D_E puis sur D_f .

Soient x et x' de $D_E =]0, +\infty[$ tel que $x \neq x'$, on a :

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\ &= \frac{\frac{a}{x} - \frac{a}{x'}}{x - x'} \\ &= \frac{\frac{ax' - ax}{xx'}}{x - x'} \\ &= \frac{a(x' - x)}{xx'(x - x')} \\ &= \frac{-a(x' - x)}{xx'(x - x')} \\ &= \frac{-a}{xx'} \end{aligned}$$

Donc : $T_f = \frac{-a}{xx'}$ puisque x et x' de $D_E =]0, +\infty[$ donc $x + x' \geq 0$ et on a $x \neq x'$ au moins un des nombres x et x' est non nul d'où $x + x' > 0$.

1^{er} cas : $a > 0$ car $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$)

On a $-a < 0$ et $x + x' > 0$ donc $\frac{-a}{xx'} < 0$ d'où $T_f < 0$.

Conclusion 1 :

- la fonction f est strictement décroissante sur $D_E =]0, +\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ car la fonction est impaire (la fonction varie dans le même sens).

2^{ème} cas : $a < 0$ car $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$)

On a $-a > 0$ et $x + x' > 0$ donc $\frac{-a}{xx'} > 0$ d'où $T_f > 0$.

Conclusion 2 :

- la fonction f est strictement croissante sur $D_f =]0, +\infty[$.
- la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ car la fonction est impaire (la fonction varie dans le même sens).

b. propriété :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{a}{x}$; ($a \in \mathbb{R}^*$) .

❖ la fonction f est impaire sur $D_f = \mathbb{R}^*$.

❖ La monotonie de la fonction f est :

- 1^{er} cas $\Delta > 0$:

la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

- 2^{ème} cas $\Delta < 0$:

la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

❖ le tableau de variation est :

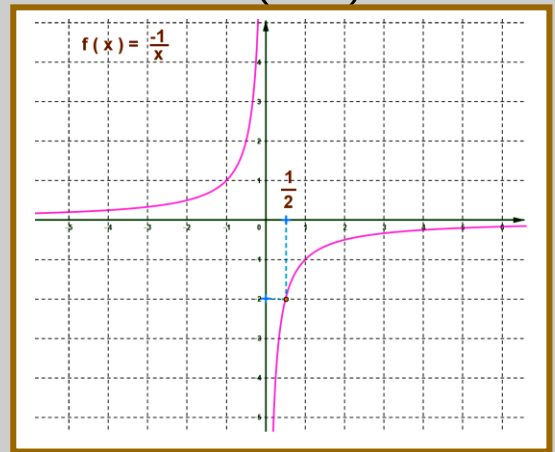
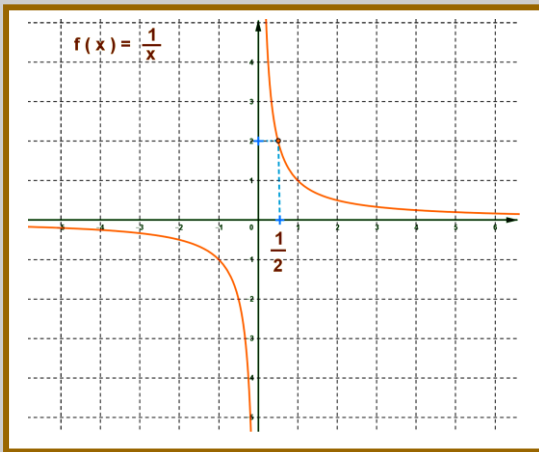
- 1^{er} cas $a > 0$:

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

- 2^{ème} cas $a < 0$:

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

❖ La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



❖ La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole ,

- ✓ de centre de symétrie l'origine O (du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$),
- ✓ d'asymptote horizontale l'axe des abscisses (la droite d'équation $(D) : y = 0$)
- ✓ d'asymptote verticale l'axe des ordonnées (la droite d'équation $(D') : x = 0$)

c. Exemple :

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2}{x}$.

On a : $a = 2$ d'où le tableau de variations de f est :

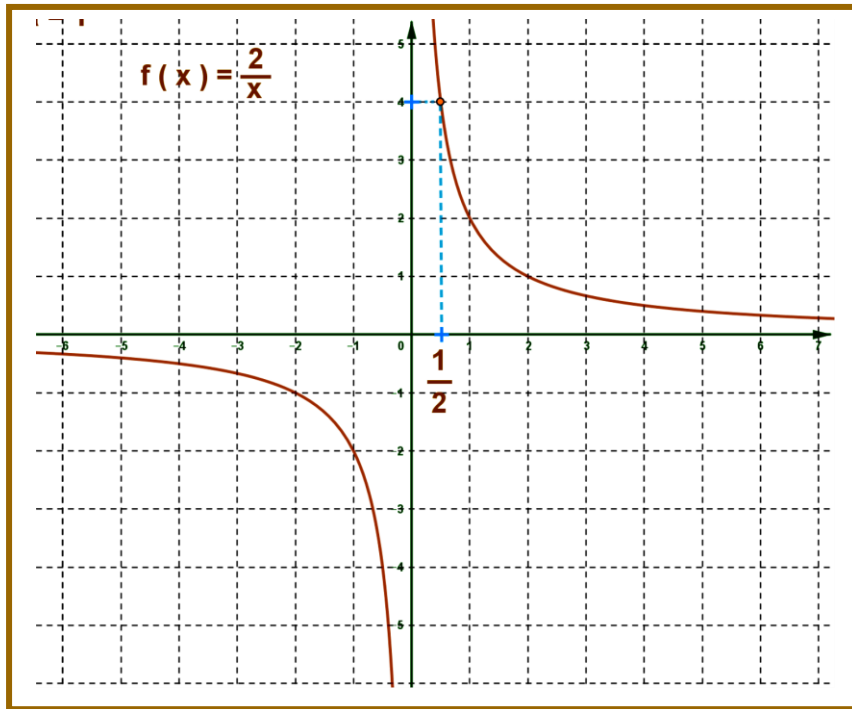
$a > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

2. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x)$	4	2	1	$\frac{2}{3}$	...

La courbe représentative : (on oublie pas que la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}^*$)



C. Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$; (avec $a \neq 0$)

a. Propriété (admise) :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$; (avec $a \neq 0$)

- ❖ La fonction f s'écrit de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta$ avec α et β de $\mathbb{R}$.
- ❖ La courbe représentative de la fonction f est une parabole, de sommet le point $S(-\alpha, \beta)$ (du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$), d'axe de symétrie la droite d'équation $(D) : x = -\alpha$).
- ❖ On La courbe représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ de la courbe $f(x) = ax^2$

❖ le tableau de variation est :

• 1^{er} cas $a > 0$:

$a > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta$	

• 2^{ème} cas $a < 0$:

$a < 0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta$	

b. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❖ Exemple $f(x) = x^2 - 4x + 3$; ($a = 1 > 0$). $a = 1 > 0$ et $b = -4$ et $c = 3$ et $\Delta = 4$

❖ le tableau de variations est :

• on a $a > 0$: On a : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

$$\text{d'où : } f(x) = x^2 - 4x + 3 = a \left(x + \frac{-4}{2 \times 1} \right)^2 - \frac{\sqrt{4}}{4 \times 1} = (x - 2)^2 - 1$$

Donc : $\alpha = -2$ et $\beta = -1$

Par suite le tableau de variations de f est :

$a = 1 > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha = 2$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta = -1$	

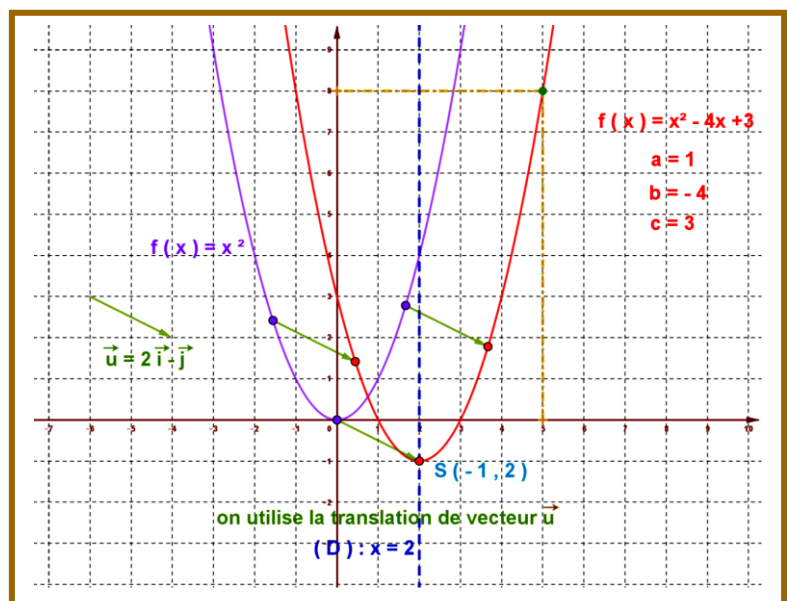
❖ La courbe représentative de f :

1^{ère} méthode (on utilise la translation)

✓ On construit la courbe d'équation $f(x) = ax^2 = x^2$

✓ Puis la translate suivant le vecteur :

$$\vec{u} = -\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

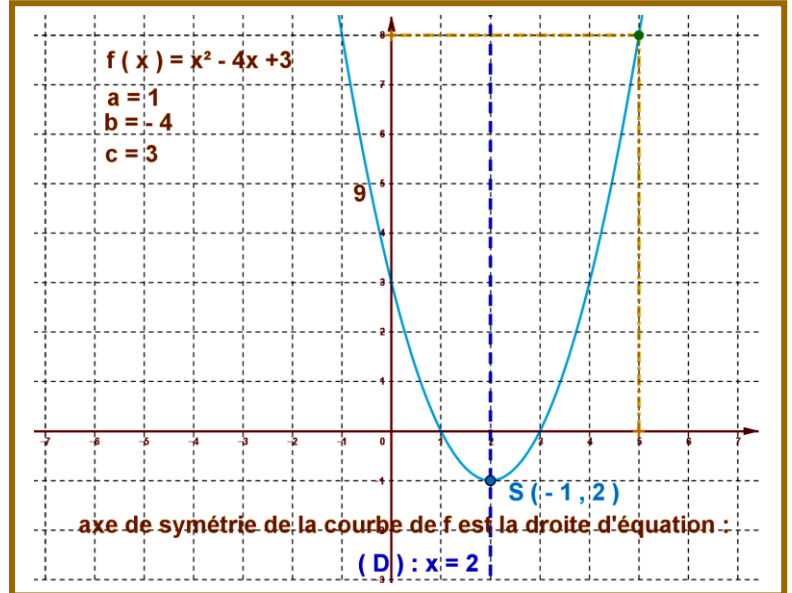


2^{ème} méthode :

✓ On trace l'axe de symétrie la droite d'équation $(D) : x = 2$.

- ✓ On place le sommet qui est le point $S(2;-1)$.
- ✓ On donne quelques valeurs avec $x \geq 2$
- ✓ On construit la partie de la courbe sur $[2, +\infty[$ puis son symétrique par rapport à (D)

x	2	3	4	5	...
f(x)	-1	0	3	8	...



D. Fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; (avec $ad - bc \neq 0$)

a. Propriété (admise) :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} ; \left(\text{avec } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \right) \text{ et } c \neq 0$$

- ❖ La fonction f s'écrit de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ avec α et β et k de $\mathbb{R}$ et $x \neq -\alpha$.
- ❖ La courbe représentative de la fonction f est un hyperbole , de centre le point $S(-\alpha, \beta)$ (du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$), de centre de symétrie le sommet le point $S(-\alpha, \beta)$.
- ❖ d'asymptote horizontale la droite d'équation (D) : $y = \beta$.
- ❖ d'asymptote verticale la droite d'équation (D') : $x = -\alpha$.
- ❖ On La courbe .représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ de la courbe de $f(x) = \frac{k}{x}$ (hyperbole)
- ❖ le tableau de variation est :

• 1^{er} cas $\Delta > 0$:

a > 0	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

• 2^{ième} cas $\Delta < 0$:

a < 0	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

b. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❖ Exemple $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; ($a=1>0$). $a=1>0$ et $b=-1$ et $c=1$ et $d=2$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

❖ le tableau de variations est :

• on a : $\Delta > 0$:

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{-3}{x+2} = 1 + \frac{-3}{x+2}$$

d'où : $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ et $k = -3$

Par suite le tableau de variations de f est :

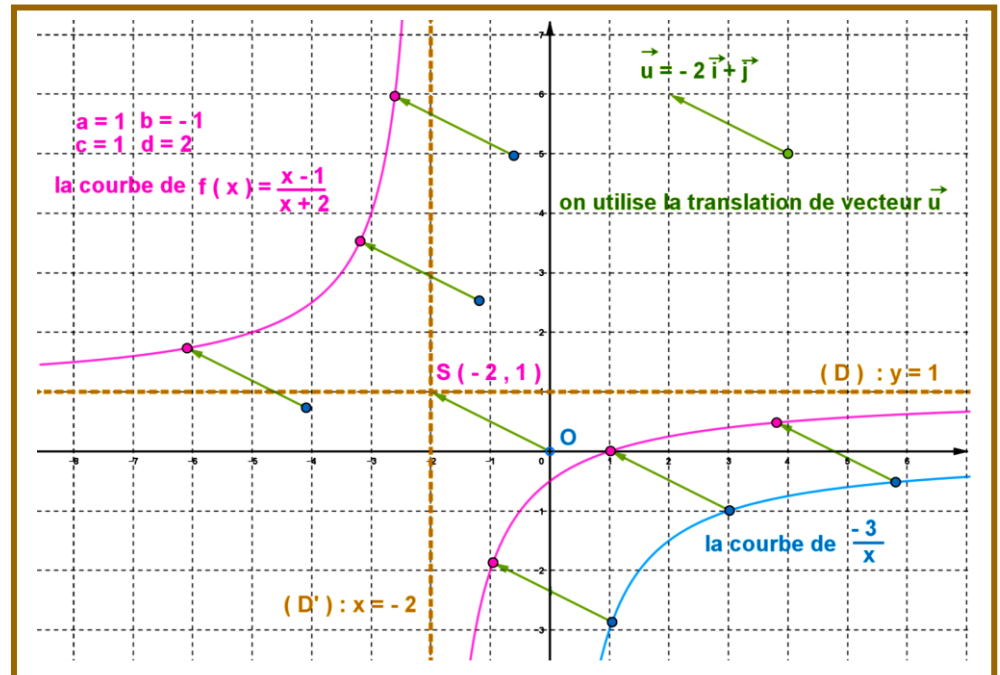
$\Delta = 3 > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha = 2$	$+\infty$
	f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

❖ La courbe représentative de f :

1^{ère} méthode

✓ On construit la courbe d'équation $f(x) = \frac{k}{x} = \frac{-3}{x}$ (hyperbole)

✓ Puis la translate suivant le vecteur : $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$.



2^{ème} méthode :

✓ On trace le sommet de l'hyperbole le point $S(2; -1)$. (Centre de symétrie de l'hyperbole)

✓ On trace :

❖ l'asymptote horizontale qui est la droite d'équation $(D) : y = \beta = 1$.

❖ l'asymptote verticale qui est la droite d'équation $(D') : x = -\alpha = -2$.

✓ On donne quelques valeurs avec $x \geq -2$

- ✓ On construit la partie de la courbe sur $]-2, +\infty[$ puis son symétrique par rapport au point $S(2; -1)$ (centre de l'hyperbole) pour obtenir la partie du courbe sur l'intervalle $]-\infty, -2[$.

x	$-\frac{4}{3}$	-1	0	1	2
f(x)	$-\frac{7}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$

