

TRIGONOMETRIE2

Leçon : TRIGONOMETRIE2 Présentation globale

Leçon : les équations et inéquations trigonométriques

I) les équations trigonométriques élémentaires

II) les inéquations trigonométriques élémentaires.

I) Les équations trigonométriques élémentaires

1) Equation: $\cos x = a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \emptyset$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\cos x = -1$

On sait que : $\cos \pi = -1$ donc tous les réels de la forme : $\pi + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $a = 1$ alors on a l'équation $\cos x = 1$:

On sait que : $\cos 0 = 1$ donc tous les réels de la forme : $0 + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\cos x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $]0; \pi]$

tel que $\cos x = \cos \alpha$ et alors on a :

$$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \cos x = -\frac{1}{2} \quad c) \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Correction: a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \cos x = -\cos \frac{\pi}{3} \quad \text{ssi}$$

$$\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{ssi} \quad \cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi :

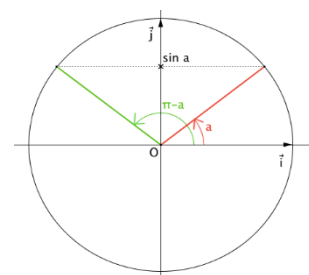
$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

2) Equation: $\sin x = a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$

alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$



Si $a = -1$ alors on a l'équation $\sin x = -1$ On sait

que : $\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$ donc les solution dans $\mathbb{R}$ de

l'équation sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Si $a = 1$ alors on a l'équation : $\sin x = 1$ On sait

que : $\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$ donc on a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\sin x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans

$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ tel que $\sin x = \sin \alpha$ et alors on a :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad b) \sin x = -\frac{1}{2} \quad c) \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

Correction: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x = -\sin \frac{\pi}{6}$ ssi $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et

$$\pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

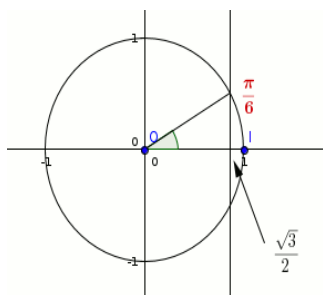
c) $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \text{ ou } \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice1 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation :

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Solution : Étape 1 : utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le

cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des

abscisses

on peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ssi } \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \text{ dans } \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$$

● Étape3

Mais il ne va falloir garder que les valeurs de x dans

l'intervalle imposé c'est à dire dans $]-\pi, \pi]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs à k

Pour la première série de valeurs

$$: x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ avec } k \text{ dans } \mathbb{Z}$$

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons :

on obtient $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$; cette valeur n'appartient pas

à $]-\pi, \pi]$; il est donc évident que des valeurs

de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$: on obtient $x = \frac{\pi}{12} - \pi$;

cette valeur appartient à $]-\pi, \pi]$.

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$ $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient

à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 0$ $x_2 = \frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 1$ $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car

n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$$x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi \text{ avec } k' \text{ dans } \mathbb{Z}$$

pour $k' = -1$ $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car

n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 0$ $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ convient car appartient

à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 1$ $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ convient pas car

appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 2$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi$ ne convient pas car

n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $]-\pi, \pi]$ est

donc : $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right\}$

3) Equation : $\tan x = a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

L'équation $\tan x = a$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \text{ avec } k \text{ un nombre relatif}$$

$$\text{Donc } D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dans D il existe un unique réel : α dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

tel que $\tan x = \tan \alpha$ et alors on a :

$$S_{\mathbb{R}} = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}.$$

Exercice2 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes

$$4 \tan x + 4 = 0$$

2) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$ l'équations suivantes :

$$2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$$

Correction: 1) on a $4 \tan x + 4 = 0$ est définie dans $\mathbb{R}$

ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec k un nombre relatif Donc

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4 \tan x + 4 = 0 \text{ ssi } \tan x = -1 \text{ ssi } \tan x = -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ssi } \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \text{ ssi } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } \sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\text{et } \pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ Encadrement de } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi : -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$$

et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \text{ Donc } -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{11}{8} \text{ Donc } -0,12 \leq k \leq 1,37 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$ ou $k=1$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Pour } k=1 \text{ on trouve } x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\bullet \text{ Encadrement de } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi : -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$$

et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \text{ Donc } -\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } -\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8} \text{ Donc } -0,8 \leq k \leq 0,6 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Exercice3 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations

$$\text{suivantes : } \cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équations suivantes :

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ l'équations suivantes :

$$\tan \left(2x - \frac{\pi}{5} \right) = 1$$

Correction: 1) on a $\cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ ssi

$$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi$$

$$\text{Ssi } 2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ Ssi}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) \text{ on a } \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \text{ ssi}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$\text{ssi } 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{Donc } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\bullet \text{ Encadrement de } \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} : 0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1 \text{ Donc } -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36} \text{ Donc}$$

$$-0,29 \leq k \leq 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

• Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1 \quad \text{Donc } -\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24} \quad \text{Donc}$$

$$-0,54 \leq k \leq 0,04 \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc k n'existe pas

• Donc $S_{[0,\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie ssi

$$2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ssi} \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$$

$$\text{ssi} \quad 2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi \quad \text{ssi} \quad x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{Donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{Donc } 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ssi} \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi \quad \text{ssi}$$

$$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi \quad \text{ssi} \quad x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$$

$$\text{donc} \quad -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40} \quad \text{donc} \quad -\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20} \quad \text{Donc}$$

$$-1,45 \leq k \leq 0,55 \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40} \right\}$$

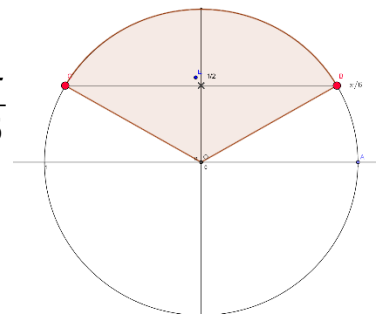
II) Les inéquations trigonométriques élémentaires

Exemple1 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc } S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



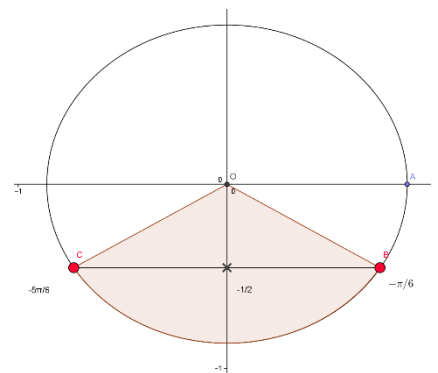
Exemple2 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{ssi} \quad \sin x \leq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{donc } S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right]$$



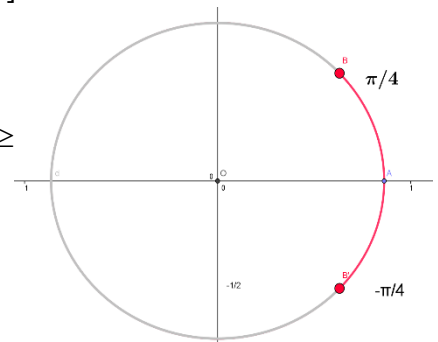
Exemple3 :

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante :

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

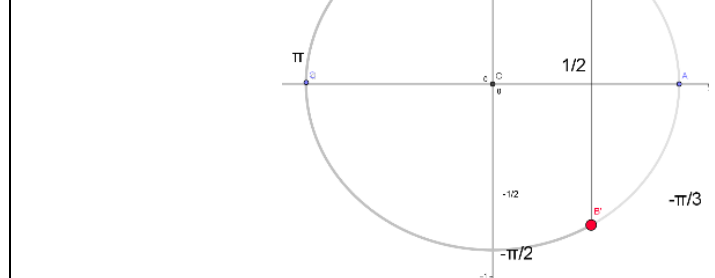
$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ssi} \quad \cos x \geq$$

$$\text{donc } S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$



Exemple4 : Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \cos x \leq \frac{1}{2}$$



$$\cos x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$$

Exemple5 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations

suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

Solution : on utilise le cercle trigonométrique

$$1) S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$2) S = [0, \pi]$$

Exemple6 : Résoudre dans $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

l'inéquation suivante : $\tan x \geq 1$

Solution :

$$S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Exemple7 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

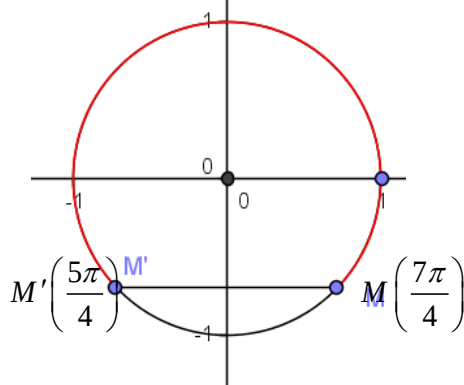
L'arc MM' en rouge correspond a tous les points $M(x)$

sq x vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$



Exemple8 : Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation

suivante : $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

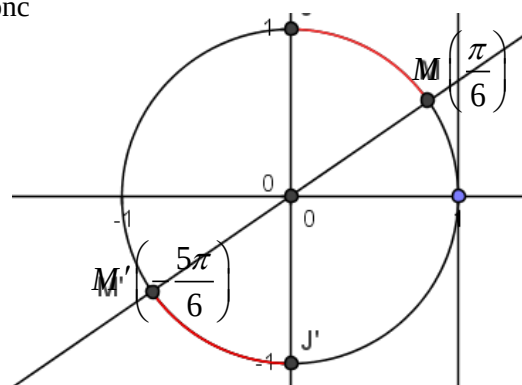
On a $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$ ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous

les points $M(x)$ sq x vérifie $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

Donc



$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Exemple9 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

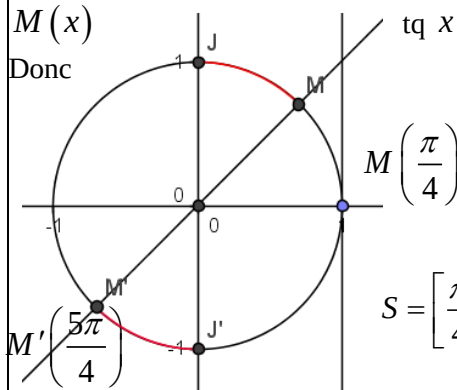
suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$

Donc



$$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$$

Exercice4 :1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations

suivantes : $2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0$$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante :

$$(2 \cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

Correction: 1) a) on pose $t = \sin x$

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou }$$

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{Donc}$$

$$0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k=1$$

Pour $k=1$ on remplace on trouve

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \quad \text{Donc}$$

$$-0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k=0 \text{ on remplace on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

Donc $\sin x - 5 < 0$

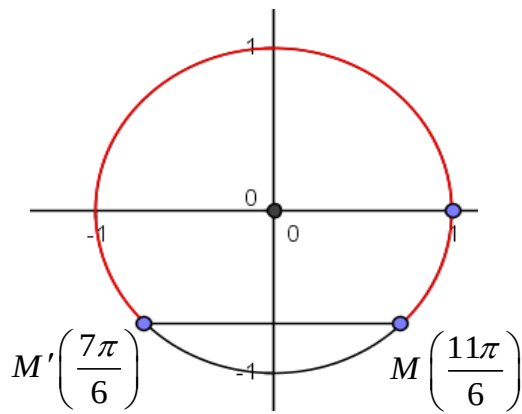
Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0 \text{ ssi } \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x \geq -\frac{1}{2}$$



$$\text{donc } S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

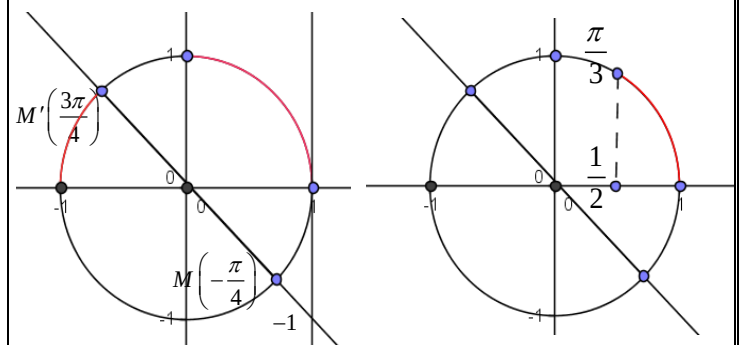
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie

dans $[0; \pi]$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2\cos x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x + 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq -1 \text{ ssi } \tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	+	-	0	+
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	-	-	0	-

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

