Tronc CS PROF : ATMANI NAJIB

TRIGONOMÉTRIE2

Leçon : les équations et inéquations trigonométriques
Présentation globale

I) les équations trigonométriques élémentaires

II) les inéquations trigonométriques élémentaires

I) les équations trigonométriques élémentaires

1) Equation: $\cos x = a$

Propriété: Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\cos x = -1$

On sait que : $\cos \pi = -1$ donc tous les réels de la forme : $\pi + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $a = 1$ alors on a l'équation $\cos x = 1$:

On sait que : $\cos 0 = 1$ donc tous les réels de la forme : $0 + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\cos x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $]0 ; \pi]$ tel que $\cos x = \cos\alpha$ et alors on a :
$S = \{\alpha + 2k\pi ; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

Correction: a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ ssi $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$ ssi $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

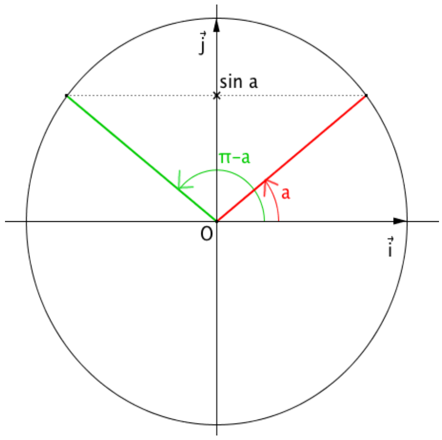
c)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1) Equation: $\sin x = a$



Propriété: Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\sin x = -1$ On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc les solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Si $a = 1$ alors on a l'équation : $\sin x = 1$ On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc on a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\sin x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin x = \sin\alpha$ et alors on a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Correction: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$ ssi $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \text{ ou } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \,;\, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ $avec\ k \in \mathbb{Z}$

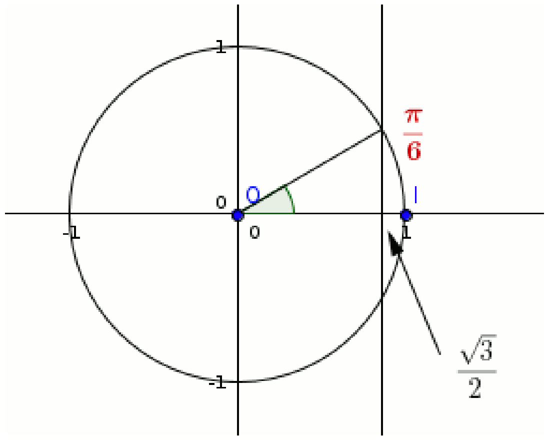
EXERCICE

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Étape 1 : utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver <u>une</u> valeur dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses

on peut dire que $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\dfrac{\pi}{6}$ par exemple.



Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $\cos 2x = \cos \dfrac{\pi}{6}$ On applique alors la propriété

Donc on a : $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens :

$x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k et k' dans $\mathbf{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + k'\pi$

- Étape3

Mais il ne va falloir garder **<u>que</u>** les valeurs de x dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $]-\pi, \pi]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a k

Pour la première série de valeurs : $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ avec k dans **Z**

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons : on obtient $x = \dfrac{\pi}{12} - 2\pi$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$: on obtient $x = \dfrac{\pi}{12} - \pi$; cette valeur appartient à $]-\pi, \pi]$.

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$ $x_1 = \dfrac{\pi}{12} - \pi = -\dfrac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 0$ $x_2 = \dfrac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 1$ $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x = -\dfrac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k' dans **Z**

pour $k' = -1$ $x = -\dfrac{\pi}{12} - \pi = -\dfrac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 0$ $x_3 = -\dfrac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 1$ $x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k'=2$ $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Donc L'ensemble solution **de l'équation dans** $]-\pi,\pi]$ est donc: $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

3) Equation : $\tan x=a$
Propriété : Soit a un nombre réel.

L'équation $\tan x=a$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec k un nombre relatif

Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans D il existe un unique réel : α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x=\tan\alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}}=\{\alpha+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$.

EXERCICE

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $4\tan x+4=0$

2) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ l'équations suivantes : $2\sqrt{2}\sin x+2=0$

Correction: 1) on a $4\tan x+4=0$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec k un nombre relatif Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

$4\tan x+4=0$ ssi $\tan x=-1$ ssi $\tan x=-\tan\frac{\pi}{4}$ ssi $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ ssi $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{4}+2k\le\frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le 2k\le\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$

Donc $-\frac{1}{8}\le k\le\frac{11}{8}$ Donc $-0,12\le k\le 1,37$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times 0\pi=-\frac{\pi}{4}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times 1\pi=\frac{7\pi}{4}$

- Encadrement de $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\le\frac{5}{4}+2k\le\frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\le 2k\le\frac{5}{2}-\frac{5}{4}$

Donc $-\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$ Donc $-0,8 \leq k \leq 0,6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on trouve $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$

Donc $S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

EXERCICE

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équations suivantes : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Correction: 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ssi $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) on a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ssi $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

ssi $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1$ Donc $-\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36}$ Donc $-0,29 \leq k \leq 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ $0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1$ Donc $-\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24}$ Donc $-0,54 \leq k \leq 0,04$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0,\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie ssi $2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

ssi $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$ ssi $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$ Donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi $2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc $-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$ Donc $-1,45\le k\le 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{9\pi}{40}$

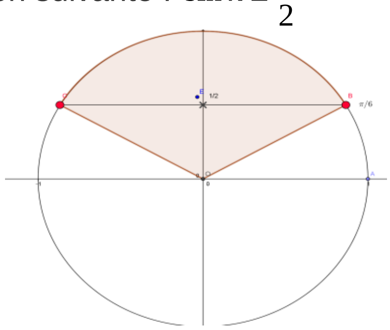
Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$ Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

II) les inéquations trigonométriques élémentaires

Exemple1 : Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x\ge\frac{1}{2}$

$\sin x\ge\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$

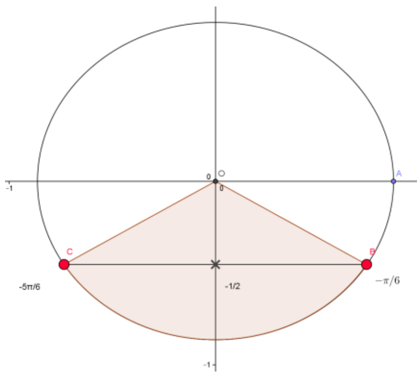
donc $S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$



Exemple2 : Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\le-\frac{1}{2}$

$\sin x\le-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\le\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

donc $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$



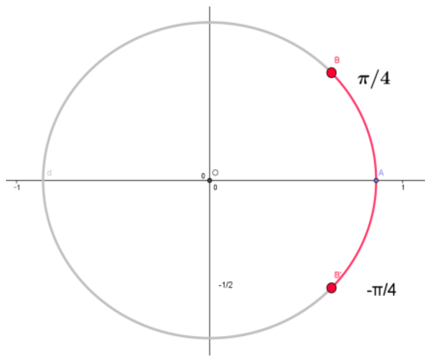
Exemple3 :

Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation suivante :

$\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos x\ge\cos\frac{\pi}{4}$

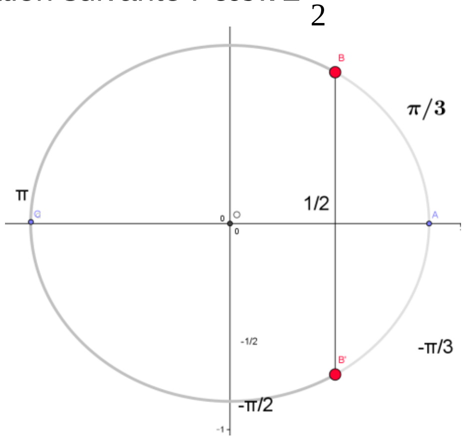
donc $S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$



Exemple4 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \le \frac{1}{2}$

$\cos x \le \frac{1}{2}$ ssi $\cos x \le \cos\frac{\pi}{3}$

Donc $S = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$



Exemple5 : Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \le 0$ 2) $\sin x \ge 0$

1) $S = \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

2) $S = [0,\pi]$

Exemple6 : Résoudre dans $S = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $\tan x \ge 1$

$S = \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

Exemple7 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

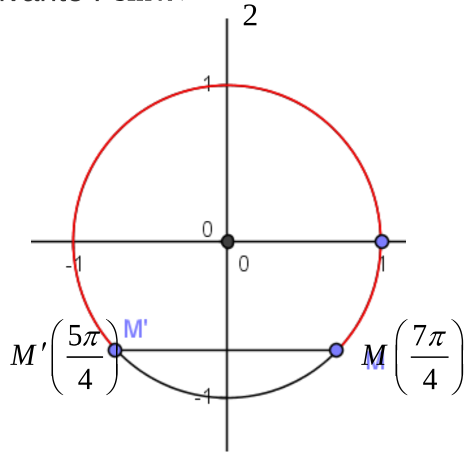
L'arc MM' en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq x vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc

$\sin x \ge \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \ge \sin\frac{\pi}{6}$

donc $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



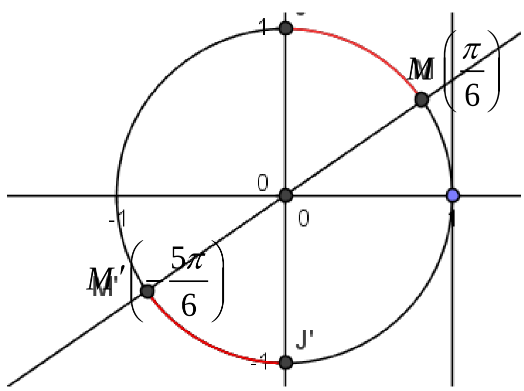
Exemple8 : Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x - \sqrt{3} \ge 0$

On a $3\tan x - \sqrt{3} \ge 0$ ssi $\tan x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3\tan x - \sqrt{3} \ge 0$ Donc

$S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$



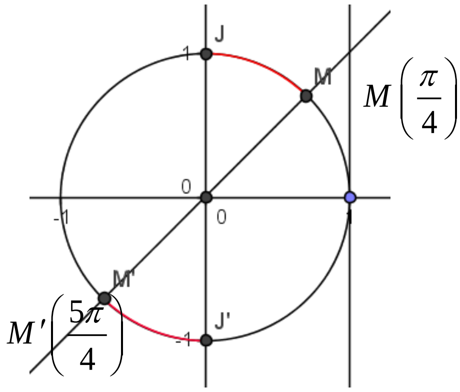
Exemple9 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x-1\geq 0$

On a $\tan x-1\geq 0$ ssi $\tan x\geq 1$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $\tan x-1\geq 0$ Donc

$S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$



Activités : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$

Correction: 1) a)on pose $t=\sin x$

$2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi $2t^2-9t-5\leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$ Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ ssi $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

ssi $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq-\frac{1}{6}+2k\leq 2$ Donc $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$ Donc $0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq 2$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$ Donc $-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi $2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-1\leq\sin x\leq 1<5$ Donc $\sin x-5<0$

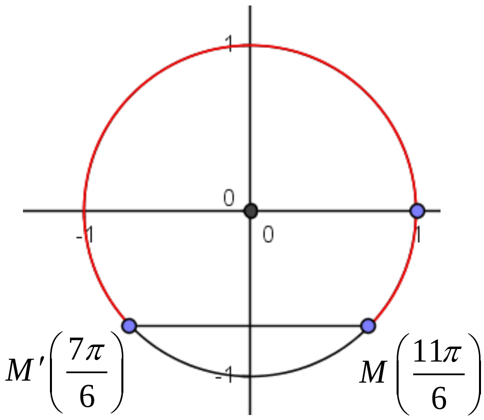
Puisque $\sin x-5<0$ et $2>0$ alors $2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$ ssi $\sin x+\frac{1}{2}\geq 0$

ssi $\sin x\geq -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

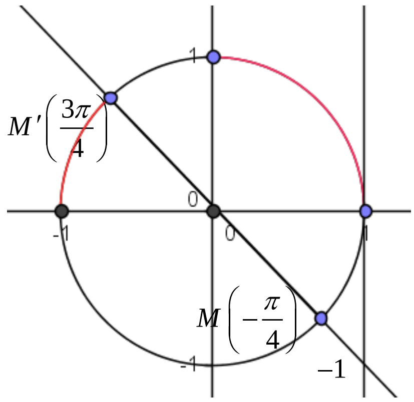
tq x vérifie $\sin x\geq -\frac{1}{2}$

donc $S=\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$



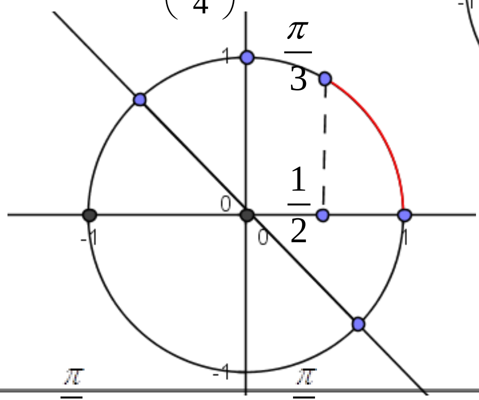
2) l'inéquation $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$ est définie dans $[0;\pi]$ ssi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Donc $D=[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



$2\cos x-1\geq 0$ ssi $\cos x=\frac{1}{2}$ ssi $\cos x\geq\cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x+1\geq 0$ ssi $\tan x\geq -1$ ssi $\tan x\geq\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	
$\tan x+1$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$(2\cos x-1)(\tan x+1)$		$+$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

donc $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$