



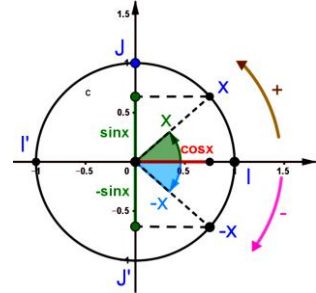
VI. Relations entre les angles :

a. Angles opposés : (x et $-x$)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

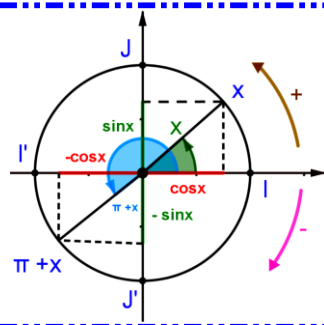


b. Angles supplémentaires : ($\pi - x$ et x)

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

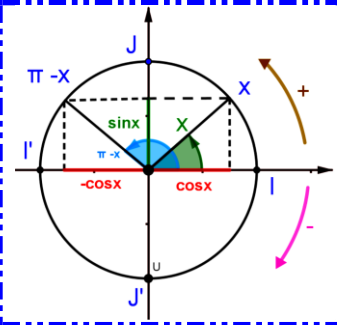


Angles opposés supplémentaires : ($\pi + x$ et x)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

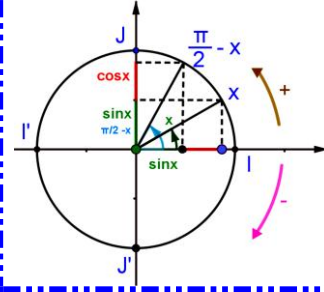


c. Angles complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x) Angles opposés complémentaires : ($\frac{\pi}{2} + x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

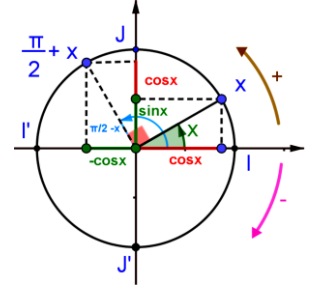
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$



d. Résumer des formules précédentes :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\sin \nearrow$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\cos \nearrow$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\tan \nearrow$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

VII. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES :

Remarque :

- le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.



- (C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OI}' = -\vec{i}$ et $\vec{OJ}' = -\vec{j}$.

A. Equations de la forme $x \in \mathbb{R} : \cos x = a$; $(a \in \mathbb{R})$:

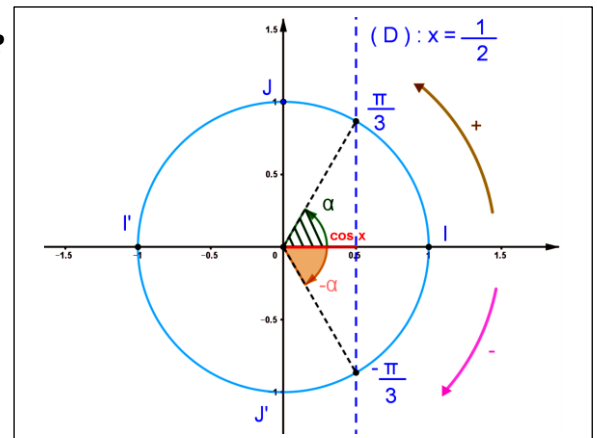
a. Activité :

- Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\cos(\vec{i}, \vec{OM}) = \frac{1}{2}$.
- Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M.
- Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.
- Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\cos(\vec{i}, \vec{OM}) = 3$?

b. Conséquence :

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } \cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{-\pi}{3}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$



d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation : $x \in \mathbb{R} : \cos x = a$; $(a \in \mathbb{R})$ a pour solutions :

1^{er} cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ l'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$ (ensemble des solutions)

2^{ème} cas : $a \in [-1, 1]$ on a : $\cos x = a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos \alpha$ d'où :

$\cos x = a$ équivaut à $\cos x = \cos \alpha$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi, x = -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Cas particulier :

- ✓ $a = 0$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- ✓ $a = 1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- ✓ $a = -1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.



d. Exercice :

Résoudre l'équation suivante :

1. $(E_1) : x \in \mathbb{R} / \cos x = \cos \frac{\pi}{4} .$

2. $(E_2) : x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} .$

3. $(E_3) : x \in \mathbb{R} / \cos(2x) = -\frac{1}{2} .$

B. Equations de la forme $x \in \mathbb{R} : \sin x = a ; (a \in \mathbb{R}) :$

a. Activité :

5. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$

6. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .

7. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) .$

8. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ?$

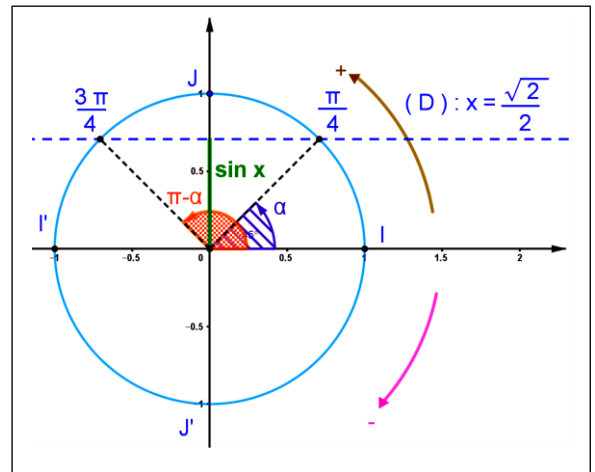
b. Conséquence :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} ; \left(\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} \right)$

équivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi , x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} .$



c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné .

L'équation : $x \in \mathbb{R} : \cos x = a ; (a \in \mathbb{R})$ a pour solutions :

1^{er} cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ l'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$ (ensemble des solutions)

2^{ème} cas : $a \in [-1, 1]$ on a : $\cos x = a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin \alpha$ d'où :

$\sin x = a$ équivaut à $\sin x = \sin \alpha$

équivaut à $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{ x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi , x = \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} .$



d. Cas particulier :

✓ $a = 0$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

✓ $a = 1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

$a = -1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

e. Exercice :

Résoudre l'équation suivante :

1. $(E_1) : x \in \mathbb{R} / \sin x = -\frac{1}{2}$.

2. $(E_2) : x \in \mathbb{R} / \sin x = 1$.

3. $(E_3) : x \in \mathbb{R} / \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

4. $(E_4) : x \in \mathbb{R} / \sin x = \cos x$.

C. Equations de la forme $x \in \mathbb{R} : \tan x = a ; (a \in \mathbb{R})$:

a. Activité :

- Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
- Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I, coupe la demi-droite [OM) au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J'$).
- la droite (T) est muni du repère $(I, \vec{i})$

1. Déterminer la condition sur x pour $\tan(x)$ est définie.

2. Construire sur la droite (T) le point T tel que : $\tan(\vec{i}, \overrightarrow{OT}) = \frac{1}{2}$.

3. Construire sur le cercle les points M intersection de la droite (OT) et le cercle (C).

4. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M.

5. Peut-on écrire les abscisses curvilignes de M d'une façon simple ?

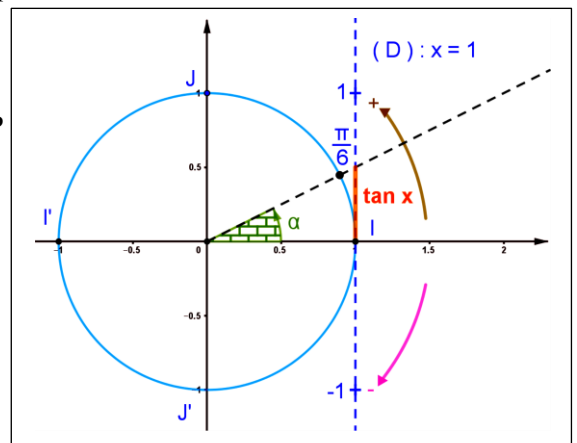
6. Déterminer les mesures de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

7. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\tan(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -5$?

b. Conséquence :

Avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } \tan x = \tan \frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$





$$\begin{aligned} & \text{équivalent à } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \\ & \text{équivalent à } x = \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

conclusion : d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation : $x \in \mathbb{R} : \tan x = a ; (a \in \mathbb{R})$ a pour solutions :

Ensemble de définition de l'équation (E) est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ (c.à.d. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$)

On a : $\tan x = a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan \alpha$ d'où :

$\tan x = a$ équivaut à $\tan x = \tan \alpha$

équivaut à $x = \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{ x \in \mathbb{R} / x = \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$ avec $a = \tan \alpha$

d. Exercice :

Déterminer l'ensemble de définition de l'équation suivantes puis résoudre ces équations :

1. $(E_1) : x \in \mathbb{R} / \tan x = \sqrt{3}$.

2. $(E_2) : x \in \mathbb{R} / \tan x = 0$.

3. $(E_3) : x \in \mathbb{R} / \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$.

VIII. Inéquations trigonométriques dans K (avec K est un intervalle de $\mathbb{R}$:

A. $x \in K ; \cos x \leq a$ ou $x \in K ; \cos x < a$ ou $x \in K ; \cos x \geq a$ ou $x \in K ; \cos x > a$.

a. Remarques préliminaires :

- Il n'y a pas de règle générale .
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique .
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}$.
- le premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0, 2\pi[$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 2^{ème} tour représente l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$...etc....



- premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $]-2\pi, 0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I), le 2^{ème} tour représente l'intervalle $]-4\pi, -2\pi]$...etc....
- on trace la droite d'équation $(D) : x = a$ (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « sinus »).
- on trace la partie (S) du segment $[I', I]$ tel que leurs **abscisses** vérifient la condition suivante :
 - **abscisses** $\leq a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x \leq a$. **abscisses** $< a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x < a$.
 - **abscisses** $\geq a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x \geq a$. **abscisses** $> a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x > a$.
- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle dont leurs projections appartiennent à (S) . (α abscisses curvilignes de M) .
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .

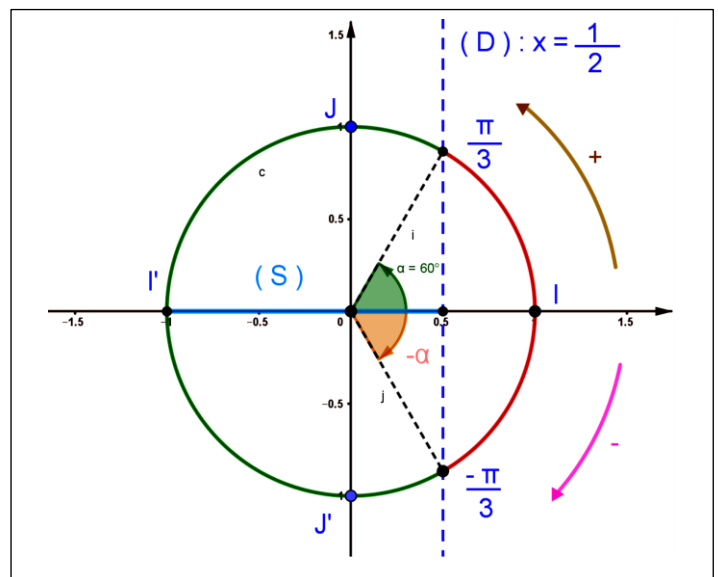
Remarque :  Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. Exemple n° 1 :

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \cos x \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 4\pi] ; \cos x \leq \frac{1}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-2\pi, 0] ; \cos x \leq \frac{1}{2}$.

Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \cos x \leq \frac{1}{2}$
 - ✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - ✓ On construit la droite $(D) : x = \frac{1}{2}$ (parallèle à l'axe des ordonnées)
 - ✓ On trace la partie (S) de $[I', I]$ (qui vérifie les abscisses $\leq \frac{1}{2}$) .





Conclusion :

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est $S_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{5\pi}{3} + 2\pi \right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3} \right]$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{5\pi}{3} - 2\pi \right] = \left[\frac{-7\pi}{3}, \frac{-11\pi}{3} \right]$$

Exemple n° 2 :

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \cos x > \frac{1}{2}$.

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 4\pi] ; \cos x > \frac{1}{2}$.

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-2\pi, 0] ; \cos x > \frac{1}{2}$.

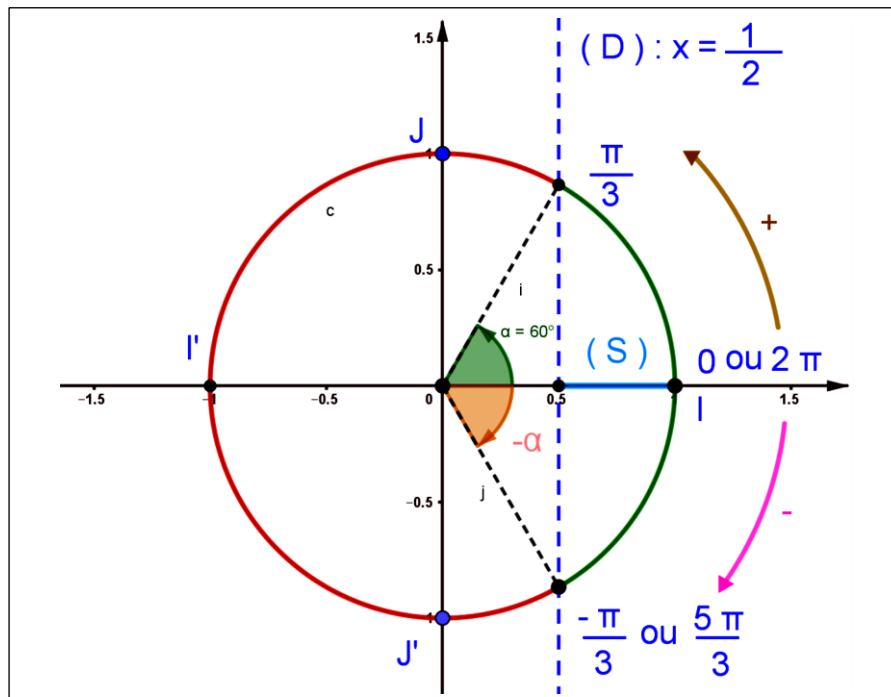
Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \cos x > \frac{1}{2}$

✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

✓ On construit la droite (D) : $x = \frac{1}{2}$ (parallèle à l'axe des ordonnées)

✓ On trace la partie (S) de $[I'I]$ (qui vérifie les abscisses $\leq \frac{1}{2}$).



**Conclusion :**

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[0, \frac{\pi}{3} \cup \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$S_2 = \left(\left[0, \frac{\pi}{3} \cup \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \cup \left(\left[0 + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi \cup \frac{5\pi}{3} + 2\pi, 2\pi + 2\pi\right] \right) \right. \\ \left. = \left(\left[0, \frac{\pi}{3} \cup \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \cup \left(\left[2\pi, \frac{7\pi}{3} \cup \frac{11\pi}{3}, 4\pi\right] \right) \right)$$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3 = \left(\left[0 - 2\pi, \frac{\pi}{3} - 2\pi \cup \frac{5\pi}{3} - 2\pi, 2\pi - 2\pi\right] \right) = \left(\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3} \cup -\frac{\pi}{3}, 0\right] \right)$$

B. $x \in K$; $\sin x \leq a$ ou $x \in K$; $\sin x < a$ ou $x \in K$; $\sin x \geq a$ ou $x \in K$; $\sin x > a$.

a. Remarques préliminaires :

- Il n'y a pas de règle générale .
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique .
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OI'} = -\vec{i}$ et $\vec{OJ'} = -\vec{j}$.
- le premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0, 2\pi[$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 2^{ème} tour représente l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$...etc....
- premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $] -2\pi, 0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 2^{ème} tour représente l'intervalle $] -4\pi, -2\pi]$...etc....
- on trace la droite d'équation $(\Delta) : y = a$ (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « cosinus » .
- on trace la partie (S') du segment $[J', J]$ tel que leurs ordonnées qui vérifient la condition suivante :
 - ordonnées $\leq a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \leq a$. ordonnées $< a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x < a$.
 - ordonnées $\geq a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \geq a$. ordonnées $> a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x > a$.
- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle dont leurs projections appartiennent à (S') . (α abscisses curvilignes de M) .
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .
- Remarque :  Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. Exemple :

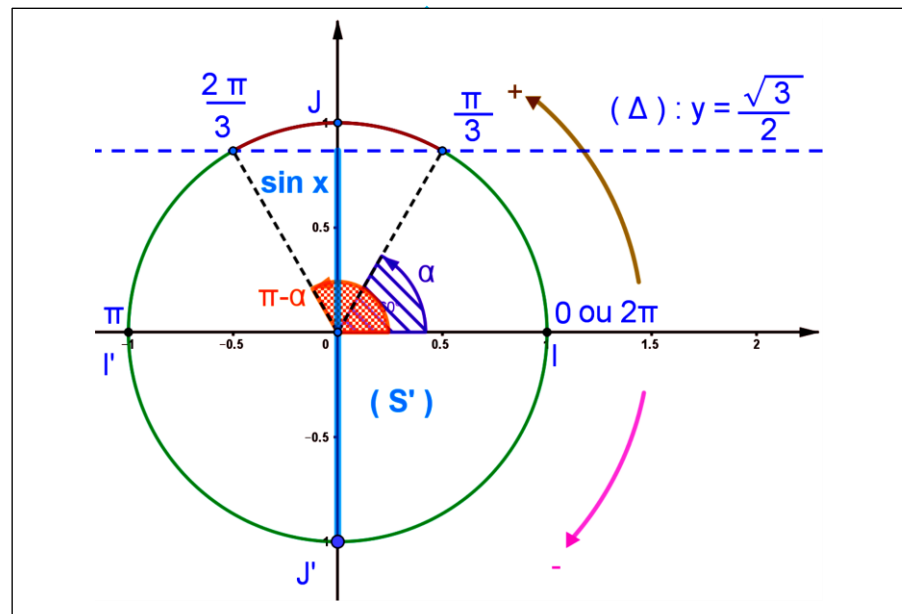
1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.



2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 4\pi] ; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-2\pi, 0] ; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_4) x \in]-\pi, \pi[; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
- ✓ On construit la droite (D) : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (parallèle à l'axe des abscisses)
- ✓ On trace la partie (S') de [J'J] (qui vérifie les ordonnées $\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$).



Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right] \right) \cup \left(\left[0 + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi, 2\pi + 2\pi\right] \right) \\
 &= \left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right] \right) \cup \left(\left[2\pi, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right] \right) \\
 &= \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right]
 \end{aligned}$$



Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_2 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right]$.

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3 = \left[0 - 2\pi, \frac{\pi}{3} - 2\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} - 2\pi, 2\pi - 2\pi\right] = \left[-2\pi, \frac{-5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{-4\pi}{3}, 0\right].$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_3 = \left[-2\pi, \frac{-5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{-4\pi}{3}, 0\right]$.

4. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_4) x \in]-\pi, \pi[; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} S_4 &= (S_1 \cap [0, \pi]) \cup (S_3 \cap]-\pi, 0]) \\ &= \left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]\right) \cup (]-\pi, 0]) \\ &= \left[-\pi, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_4 = \left[-\pi, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

C. $x \in K ; \tan x \leq a$ ou $x \in K ; \tan x < a$ ou $x \in K ; \tan x \geq a$ ou $x \in K ; \tan x > a$.

a. Remarques préliminaires :

- Il n'y a pas de règle générale .
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique .
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}$.
- le premier demi-tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0, \pi]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 3^{ème} demi-tour représente l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$...etc....(car $\tan(\pi + x) = \tan x$)
- premier demi-tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $[-\pi, 0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 3^{ème} demi-tour représente l'intervalle $[-4\pi, -3\pi]$...etc....
- on trace la droite (Δ_T) tangente au cercle au point I (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « sinus ») tel que la droite (Δ_T) est muni du repère $(I, \vec{j})$.
- on trace la partie (S_T) de la droite (Δ_T) tel que leurs **abscisses (par rapport de la droite (Δ_T))** vérifient la condition suivante :
 - **abscisses** $\leq a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x \leq a$. **abscisses** $< a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x < a$.
 - **abscisses** $\geq a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x \geq a$. **abscisses** $> a$ pour l'inéquation $x \in K ; \cos x > a$.



- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle tel que la demi-droite $[OM)$ coupe la partie (S_T) .
(α abscisses curvilignes de M) . (on élimine J et J')
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .

Remarque :

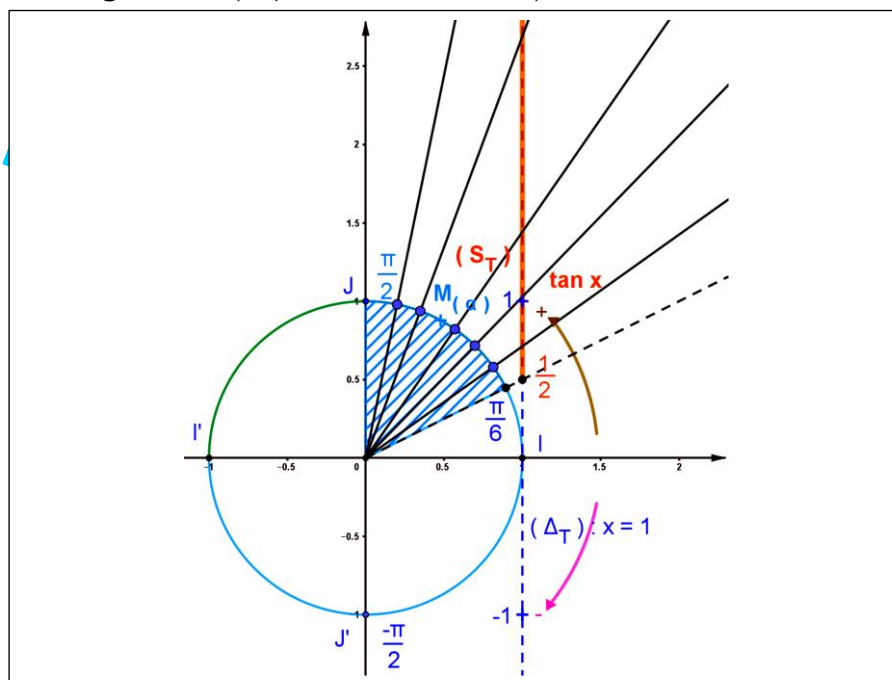
- Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation
- Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. Exemple n° 1 :

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, \pi] ; \tan x > \frac{1}{2}$.
2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 2\pi] ; \tan x > \frac{1}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-\pi, 0] ; \tan x > \frac{1}{2}$.

Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, \pi] ; \tan x > \frac{1}{2}$
 - ✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - ✓ On construit la droite (Δ_T) tangente au cercle au point I l'origine du cercle (parallèle à l'axe des ordonnées)
 - ✓ On trace la partie (S_T) de (Δ_T) (qui vérifie les abscisses $> \frac{1}{2}$) .
- On cherche tous les points $M_{(\alpha)}$ de (C) tel que la demi-droite $[OM)$ coupe la partie (S_T) .
(α abscisses curvilignes de M) . (on élimine J et J')



**Conclusion :**

2. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$S_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi \right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est : $S_3 = \left[\frac{\pi}{6} - \pi, \frac{\pi}{2} - \pi \right] = \left[\frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{2} \right]$.

IX. Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) x \in [0, 2\pi] ; \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

Conclusion : l'ensemble des solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} - 2k\pi; \frac{5\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

On cherche les solutions qui appartiennent à $[0, 2\pi]$

• Pour les solutions $x_2 = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{12} - 2k\pi \in [0, 2\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{12} - 2k\pi \leq 2\pi ; (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq -2k \leq 2 - \frac{5}{12} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{19}{12} \leq k \leq -\frac{5}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{19}{24} \leq k \leq \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$ donc : $k = 0$ d'où : $x_2 = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi = \frac{5\pi}{12} \in [0, 2\pi]$

Conclusion 1 : l'ensemble des solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} - 2k\pi; \frac{5\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$



- Pour les solutions $x_1 = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi$, on a :

$$-\frac{\pi}{4} - 2k\pi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{4} - 2k\pi \leq 2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq -2k\pi \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq -2k \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \leq k \leq -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{8} \leq k \leq \frac{-1}{8}$$

Conclusion 2 : Puisque $k \in \mathbb{Z}$ donc : $k = -1$ d'où : $x_1 = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi]$

Conclusion : l'ensemble des solution de l'équation dans $[0, 2\pi]$ est : $S = \left\{ \frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

On peut utiliser la méthode suivante :

On utilise le cercle trigonométrique puis on construit sur le cercle les points $M_{(\alpha)}$ (approximatif pour certain abscisses curvilignes) tel que α est solution de l'équation donner puis on donne les solutions qui appartiennent à l'intervalle donné de la façon suivante

- 1^{er} tour antihoraire présente l'intervalle $[0, 2\pi]$.
- 2^{ème} tour antihoraire présente l'intervalle $[2\pi, 4\pi]$ etc.
- 1^{er} tour horaire présente l'intervalle $[-2\pi, 0]$.
- 2^{ème} tour antihoraire présente l'intervalle $[-4\pi, -2\pi]$ etc.

D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solution sur l'intervalle

$$\checkmark [0, 2\pi] \text{ est } S = \left\{ \frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\checkmark [-2\pi, 0] \text{ est } S = \left\{ \frac{-19\pi}{12}; \frac{-\pi}{4} \right\}$$

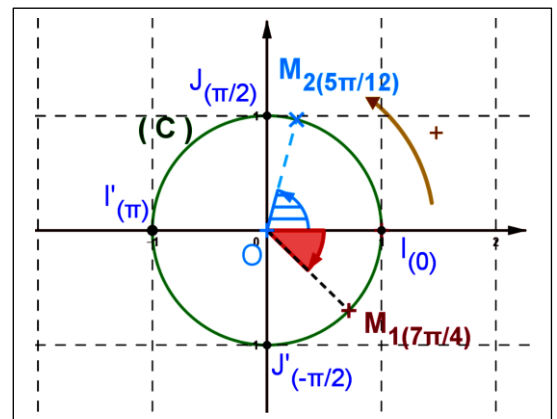
$$\checkmark [-\pi, \pi] \text{ est } S = \left\{ \frac{5\pi}{12}; \frac{-\pi}{4} \right\}$$

2. $(E_2) x \in [0, \pi] ; \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

On a :

$$\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$





$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

Conclusion : Les solutions sur sont de la forme $S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. $(E_3) x \in \mathbb{R} ; \cos 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

On a :

$$\cos 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) ; \left(\text{car } \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -2x + x = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ -x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

Conclusion :

Les solutions sur sont de la forme $S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}k\pi, x = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Remarque :  pour trouver le nombres des points à construire pour le première solution :

- $x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}k\pi$ on pose $\frac{2}{3}k\pi = 2\pi$ donc $k = 3$ d'où on a trois points à construire .
- $x = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi$ on pose $2k\pi = 2\pi$ donc $k = 1$ d'où on a un point à construire .