



L. Orientation d'un plan – le cercle trigonométrique – abscisses curvilignes :– égalité de deux polynômes :

A. Orientation d'un plan:

a. Activité :

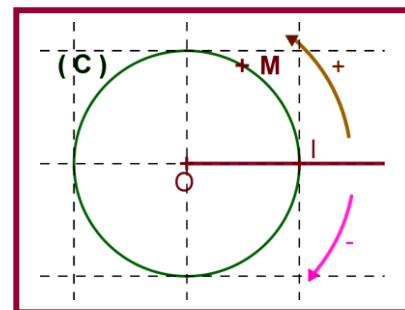
- On considère le plan (P) ; O est un point de (P) et (C) est un cercle de centre O et de rayon r .
- On prend le point I de (C) tel que la demi droite $[O, I)$ est horizontale et dirigée vers la droite .
- On construit un point M de (C) à partir de M on a de sens pour arriver à I , un sens est celui de la rotation des aiguilles du montre l'autre sens est le contraire de la rotation des aiguilles du montre.
- On choisit comme sens positif le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre , on le note par $+$.
- On choisit comme sens négatif le sens de la rotation des aiguilles du montre , on le note par $-$.

b. Vocabulaire :

- On dit que le cercle est muni d'un origine I .
- On dit que le cercle est orienté positif ou direct qui est le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre .
- Si tous les cercles du plan sont orientés d'une orientation positive on dit que le plan est orienté positif (ou direct)

B. le cercle trigonométrique :

a. Définition :



Tout cercle (C) du plan (P) possède :

- son rayon est $r = 1$
- muni d'un origine I .
- orienté positif .

ce cercle (C) est appelé cercle trigonométrique .

b. remarque :

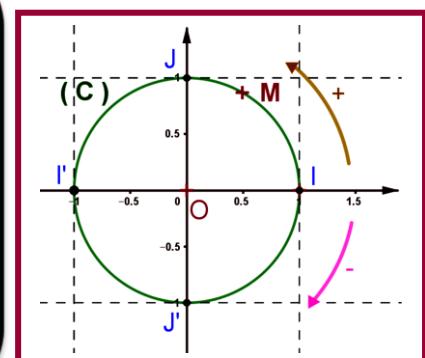
si le plan P est rapporté a un repère orthonormé (O, \vec{OI}, \vec{OJ})

et O est le centre du cercle (C) et le point J est placé dans le sens positif . on dit que le cercle trigonométrique (C)

lié au repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}) = (0, \vec{i}, \vec{j})$

(avec $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$).

Pour toutes les paragraphes qui nous reste : le cercle (C) est le cercle trigonométrique d'origine I et son centre est le point O .



C. Abscisses curvilignes :

a. Activité :

- On a : le périmètre du cercle trigonométrique (C) est $p = 2r\pi = 2 \times 1 \times \pi = 2\pi$.
- M est un point de (C) tel que l'arc géométrique $[IM]$ sa longueur est α (avec $0 \leq \alpha \leq 2\pi$) .



- Si on roule autour du cercle un fil de longueur $\alpha + 2\pi$ la première extrémité en I .

1. la position de la deuxième extrémité sur le cercle est en M
2. Même point M pour les fils de longueur $\alpha + 4\pi$ et $\alpha + 6\pi$...
3. un fil de longueur $\alpha + 2\pi$ on le coupe en deux morceaux un de longueur α l'autre 2π . pour le fil de longueur α à partir de I dans le sens positif 2^{ième} extrémité sera en M et à partir de M on place la 1^{ère} extrémité du deuxième fil on cherche en allant dans le sens négatif la position du deuxième extrémité du fil sera aussi en M dans ce cas on écrit $\alpha - 2\pi$ de même pour $\alpha - 4\pi$ et $\alpha - 6\pi$ on obtient le même point M .

b. Vocabulaire :

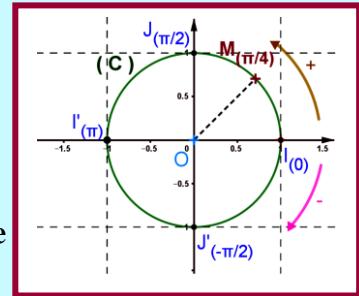
Les nombres $\alpha - 6\pi$ et $\alpha - 4\pi$ et $\alpha - 2\pi$ et α et $\alpha + 4\pi$ et $\alpha + 6\pi$... on les note par $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ces nombres sont **appelés abscisses curvilignes du point M on les note $M_{(\alpha+2k\pi)}$** ou simplement par $M_{(\alpha)}$.

c. Définition :

$M_{(\alpha+2k\pi)}$ est un point de (C) il existe un et un seul abscisse curviligne de M qui appartienne à $]-\pi, \pi]$ (c.à.d. $-\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi$) cet abscisse est appelé **abscisse curviligne principal de M**

d. Remarque :

- ✓ Si M est situé sur le demi cercle « supérieure » la mesure principale appartienne à $[0, \pi]$.
- ✓ Si non la mesure principale appartienne à $]-\pi, 0]$.
- ✓ Les abscisses curvilignes de I sont $0 + 2k\pi = 2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de I est 0 (zéro) .
- ✓ Les abscisses curvilignes de J sont $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de J est $\frac{\pi}{2}$
- ✓ Les abscisses curvilignes de I' sont $\pi + 2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de I' est π .
- ✓ Les abscisses curvilignes de J' sont $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de J' est $-\frac{\pi}{2}$



e. Exercice :

Donner les abscisses curvilignes des points de la figure .

II. Angle orienté de deux demi-droites – de deux vecteurs non nuls :

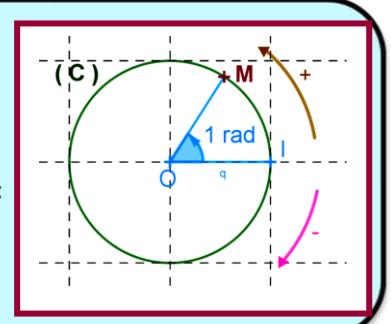
A. Radian – grade :

a. Définition :

A et B deux points du cercle trigonométrique (C) d'origine I et son centre est le point O . La longueur de l'arc géométrique $[AB]$ est 1 .

- l'angle de sommet O et qui intercepte l'arc $[AB]$ on dit que sa mesure est :

1 radian on note 1 rad . On a : $180^\circ = \pi$ rad et $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad





b. Remarque :

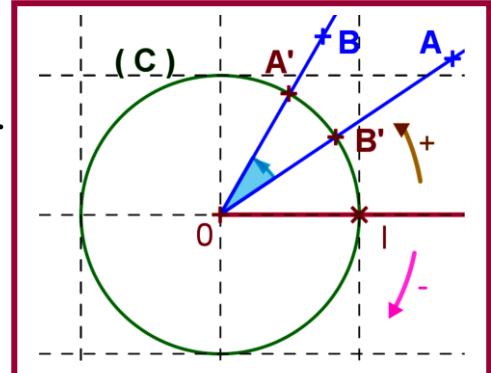
- Il existe une autre unité de mesure des angles , on l'appelle grade

on la note par gr tel que $180^\circ = \pi \text{ rad} = 200\text{gr}$ et $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 100 \text{ gr.}$

- Si un angle sa mesure est x et y et z respectivement en degré et radian et grade alors $\frac{x}{180^\circ} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$

c. Exercice :

- Exprimer en radian et en grade la mesure suivante : 60° .
- Exprimer en radian et en degré la mesure suivante : 150 gr.



B. Mesure d'un angle orienté de deux demi-droites :

a. Définition :

Soit $[OA)$ et $[OB)$ deux demi droites du plan (P) tel que : $A \neq 0$ et $B \neq O$.

Le couple $(([OA), [OB]))$ est appelé l'angle orienté du demi-droites on le note (OA, OB) .

b. Remarque :

Le couple $(([OB), [OA]))$ détermine un autre angle orienté , on le note (OB, OA) qui différent de l'angle (OA, OB) .

c. Angles déterminer par deux demi droites :

On considère dans le plan (P) deux points A et B puis le cercle trigonométrique (C) de centre O . tel que : $A \neq 0$ et $B \neq O$.

Les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ coupent (C) respectivement en $A'_{(\alpha)}$ et $B'_{(\beta)}$ tel que leurs abscisses curvilignes sont α et β on a :

- Les mesures de l'angle orienté (OA, OB) sont les nombres réels $\beta - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
on note : $(\overline{OA, OB}) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$ ou encore $(\overline{OA, OB}) = \beta - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

On lit : mesures de l'angle orienté (OA, OB) congrue à $\beta - \alpha$ modulo 2π .

- La mesure qui vérifie $(\beta - \alpha + 2k\pi) \in]-\pi, \pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle orienté (OA, OB) .



d. Exemple :

On donne la mesure principale de $(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{15\pi}{4}$ $[2\pi]$.

1^{ière} méthode :

On a : $\frac{15\pi}{4} = \frac{16-1}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ on a : $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$ d'où la mesure principale est $-\frac{\pi}{4}$.

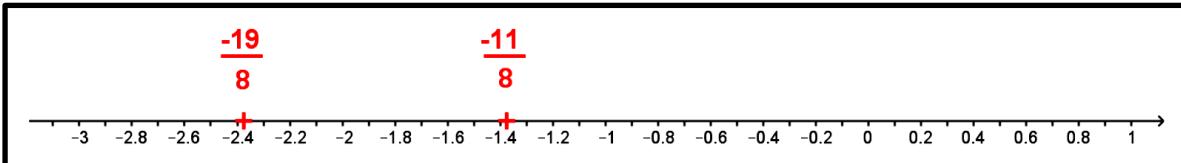
2^{ième} méthode :

Puisque on a une mesure est $\frac{15\pi}{4}$ donc toutes les mesures sont de la forme $\frac{15\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc la mesure principale vérifie la condition suivante : $\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \frac{15\pi}{4} + 2k\pi \in]-\pi, \pi] &\Leftrightarrow -\pi < \frac{15\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -1 < \frac{15}{4} + 2k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{15}{4} \right) < k \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{15}{4} \right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{19}{8} < k \leq -\frac{11}{8} \quad \left(-\frac{19}{8} \approx -2,375 \text{ et } -\frac{11}{8} \approx -1,375 \right) \end{aligned}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$ on obtient $k = -2$



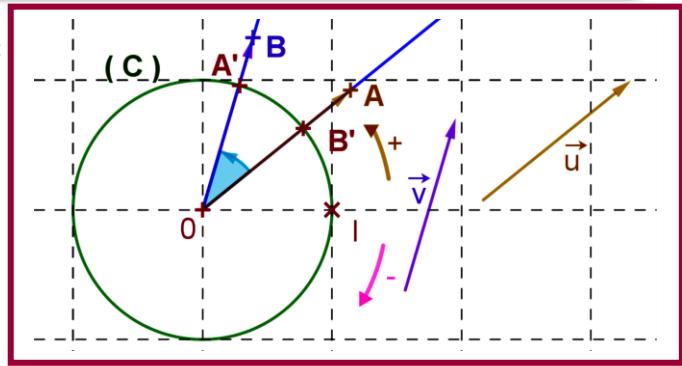
e. Propriété :

le plan (P) est orienté positif , O est un point de (P) .

soient $[OA)$ et $[OB)$ et $[OC)$ trois demi-droites de (P) on a :

- $\overrightarrow{(\text{OA}, \text{OA})} \equiv 0[2\pi]$.
 - $\overrightarrow{(\text{OA}, \text{OB})} \equiv -\overrightarrow{(\text{OB}, \text{OA})}[2\pi]$.
 - $\overrightarrow{(\text{OA}, \text{OB})} + \overrightarrow{(\text{OB}, \text{OC})} \equiv \overrightarrow{(\text{OA}, \text{OC})}[2\pi]$ (relation de shale)

2 Angle déterminer par deux vecteurs non nuls :





a. Définitions :

le plan (P) est orienté positif , O est un point de (P) .

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de (P) .

soient A et B deux points de (P) tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

- l'angle orienté des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est l'angle orienté (OA, OB) (c.à.d. des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, on le note (\vec{u}, \vec{v}) .
- Les mesures de l'angle orienté (OA, OB) sont appelées les mesures de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) on note (\vec{u}, \vec{v})
- On a : $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$.
- La mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) qui appartienne à $[-\pi, \pi]$ est appelée la mesure principale de (\vec{u}, \vec{v}) .

b. Propriété :

le plan (P) est orienté positif .

Soient \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs non nuls de (P) . on a :

- $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0 [2\pi]$ (ou bien $(\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$)
- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]$ (ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$)
- $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi]$ (ou bien $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$) .

III. Lignes trigonométriques du réel x :

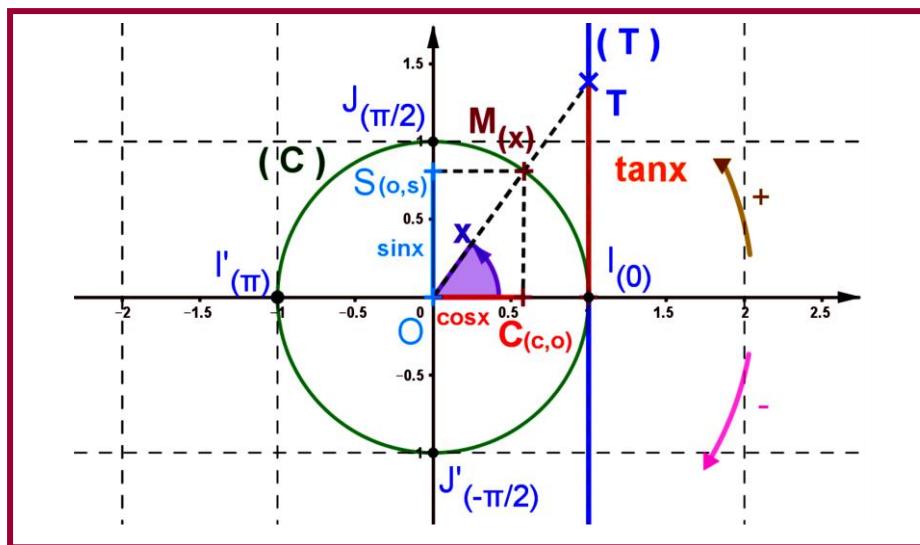
a. Activité :

- le plan \mathbb{R} est rapporté à un repère orthonormé direct . O est le centre du cercle (C) est le cercle trigonométrique d'origine I (et de centre O) lié repère au tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI}' = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}' = -\vec{j}$.

Remarque :

Soit le point $M_{(x)}$ un point de (C) (x est une abscisse curviligne de M) (voir figure)

d'où $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$



donc $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv x - 0 [2\pi]$ d'où : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv x [2\pi]$ ou bien $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

on pose $M(c, s)$ par rapport au repère orthonormé direct

- Le point $C(c, 0)$ est la projection orthogonale de M sur la droite (OI) . (sachant que $C \in [I', I]$) . (avec $c = OC$ si $c \geq 0$; $c = -OC$ si $c \leq 0$)
- Le point $S(0, s)$ est la projection orthogonale de M sur la droite (OJ) . (sachant que $S \in [J', J]$) . (avec $s = OS$ si $s \geq 0$; $s = -OS$ si $s \leq 0$)
- Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I , coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J'$ donc condition sur les abscisses curvilignes de M doit vérifier $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$)
- la droite (T) est muni du repère (I, \vec{i}) d'où le point T a pour abscisse sur l'axe (T) le réel t . (avec $t = OT$ si $t \geq 0$; $t = -OT$ si $t \leq 0$).

b. Vocabulaire :

(x est l'abscisse curviligne du point $M \in (C)$)

- L'abscisse c de M est appelée le cosinus du réel x . on note $\cos x$ d'où $\cos x = \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = c$.
- L'ordonnée s de M est appelée le sinus du réel x . on note $\sin x$ d'où $\sin x = \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = s$.
- L'abscisse t de M par rapport à l'axe (droite) (T) tangente au cercle (C) en I est appelée la tangente du réel x . on note $\tan x$ d'où $\tan x = \tan(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = t$.



c. Définition :

x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)} \in (C)$ tel que (C) est le cercle trigonométrique d'origine

I lié au repère orthonormé . $M(c,s)$ par rapport au repère orthonormé direct .

- Le réel c (abscisse de M) est appelé le sinus du réel x , on note $\cos x$ d'où $\cos x = \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = c$
- Le réel s (ordonnée de M) est appelé le cosinus du réel x , on note $\sin x = s$ d'où $\sin x = \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = s$.
- Le réel t (abscisse du point T) est appelé le cosinus du réel x , on note $\tan x$ d'où $\tan x = \tan(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = t$. (sachant la droite (T) tangente au cercle (C) en I et du point T avec $(T) \cap [OM] = \{T\}$).

d. Conséquences :

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour tout x de \mathbb{R} .
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout x de \mathbb{R} .
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout x de \mathbb{R} .
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

IV. Signe de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$:

a. Quadrant d'un cercle :

- on divise le cercle en quatre arcs de même longueur A partir de I vers J (suivant le sens positif) .
- x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)} \in (C)$.
- le 1^{er} arc IJ (à partir de I vers J) si $M_{(x)} \in IJ$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le premier quadrant .
- le 2^{ième} arc JJ' (à partir de J vers J') si $M_{(x)} \in JJ'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le deuxième quadrant
- le 3^{ième} arc J'I' (à partir de J' vers I') si $M_{(x)} \in J'I'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le troisième quadrant
- le 4^{ième} arc I'I (à partir de J vers J') si $M_{(x)} \in I'I$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le quatrième quadrant

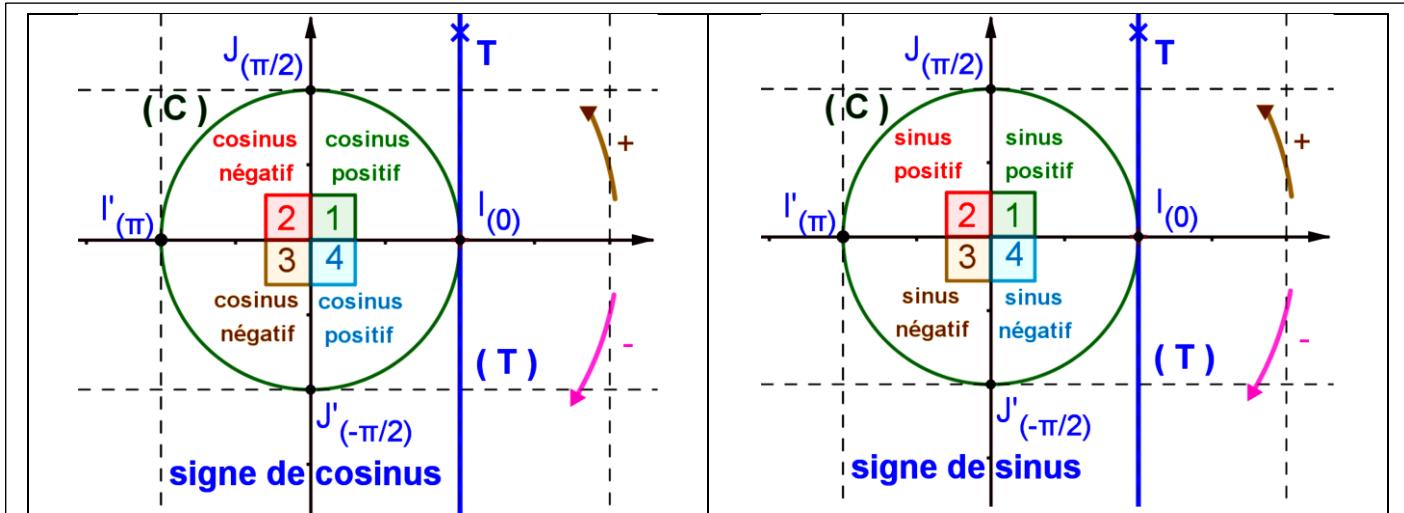
b. signe des lignes trigonométriques suivant les quadrants :

est situé au $M_{(x)}$	Quadrant n° 1	Quadrant n° 2	Quadrant n° 3	Quadrant n° 4
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-

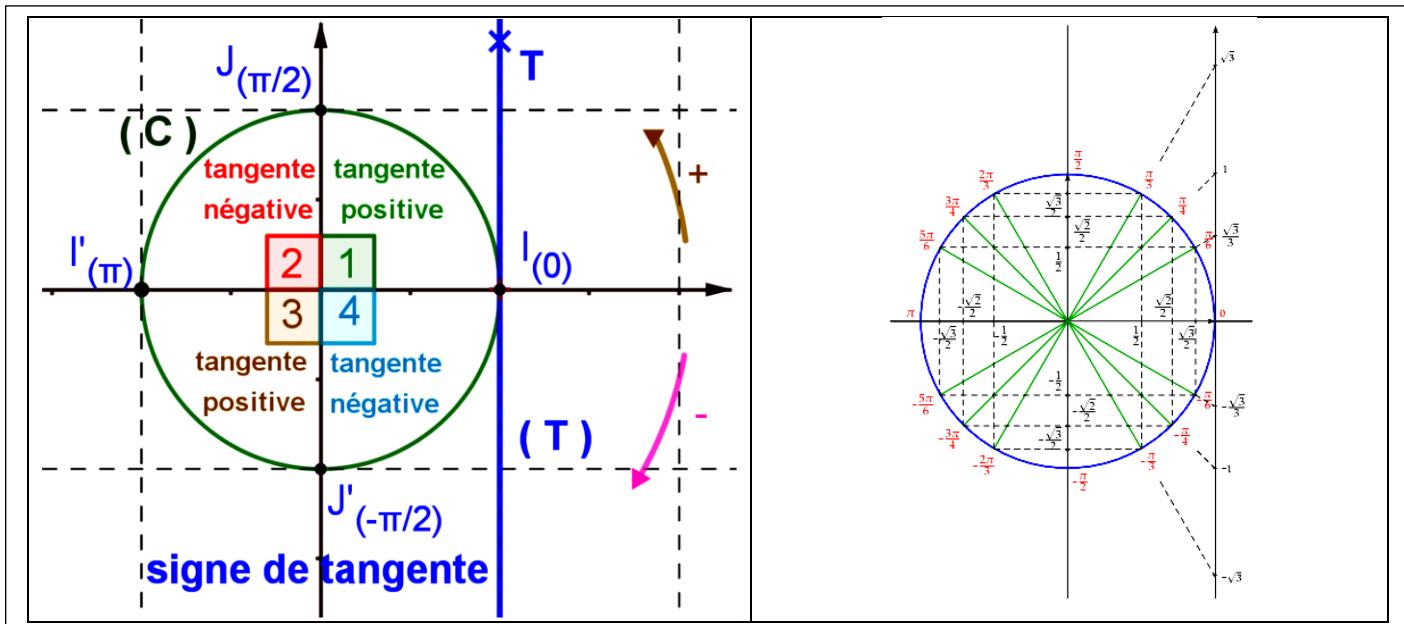


c. signe des lignes trigonométriques graphiquement :

1. signe de cosinus et de sinus :



2. Signe de tangente :



V. les lignes trigonométriques et les angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X



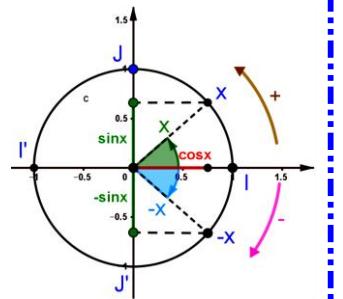
VII. Relations entre les angles :

a. Angles opposés : (x et $-x$)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

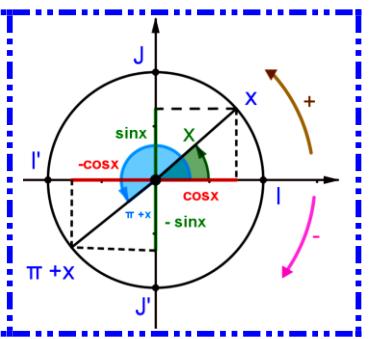


b. Angles supplémentaires : ($\pi - x$ et x)

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

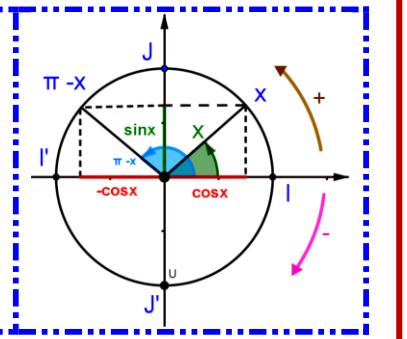


Angles opposés supplémentaires : ($\pi + x$ et x)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

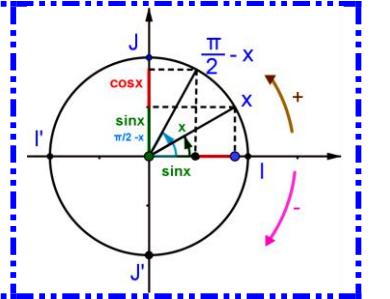


c. Angles complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x) Angles opposés complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

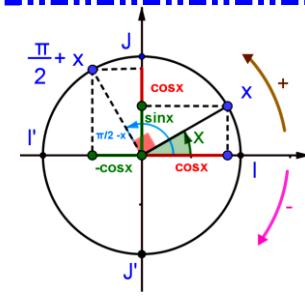
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$



d. Résumer des formules précédentes :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
\sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
\cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
\tan	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$