

Systèmes : partie 2

1) On appelle système de deux équations du premier degré a deux inconnues toute système de la forme :

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ où les coefficients } a, b, c, d \text{ sont des}$$

réels donnés et le couple (x, y) est l'inconnue dans \mathbb{R}^2

Résoudre le système (I) c'est déterminer l'ensemble S des solutions c a d l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient les deux équations: $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ simultanément

2) pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution
- Méthode de combinaison linéaire ou addition
- Méthode des déterminants
- Méthode graphique

a) Méthode de substitution :

Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Exemple : Dans le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$, on exprime x en fonction de y dans la première équation et on obtient le

$$\text{Système équivalent : } \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} .$$

On remplace ensuite x par $3 - 2y$ dans la seconde équation,

$$\text{ce qui donne le système : } \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + 3y = 4 \end{cases} \text{ SSI}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -y + 6 = 4 \end{cases}, \text{ soit encore à } \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

et on remplace y par 2 dans la première équation on trouve

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ donc : solution donc: } S = \{(-1, 2)\}$$

b) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.



Exemple : Dans le système $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 13x = 26 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} 8 + 6y = 14 \\ x = 2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 6y = 6 \\ x = 2 \end{cases}$ encore ou $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. On en déduit le couple solution : $S = \{(2, 1)\}$.

Remarque : Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Si les coefficients de x et de y sont proportionnels, c'est-à-dire si $ab' = a'b$, ce système a une infinité de solutions ou pas de

- si de plus $ac' \neq a'c$, alors le système n'a pas de solution ;
- si $ac' = a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

c) Méthode des déterminants

Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \text{ son déterminant}$$

- Si $\Delta \neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution

$$\text{unique } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{cb' - c'b}{\Delta} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac' - a'c}{\Delta}$$

- Si $\Delta = 0$ alors :

✓ Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ alors : les deux équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax + by = c$ et alors on a : $S = \left\{ \left(x; \frac{c - ax}{b} \right) / x \in \mathbb{R}; b \neq 0 \right\}$

✓ Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S = \emptyset$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien