



## I. Equations de 1<sup>ère</sup> degré d'un seul inconnu – inéquation de 1<sup>ère</sup> degré d'un seul inconnu : ( rappel )

### A. Equations de 1<sup>ère</sup> degré d'un seul inconnu :

#### a. Définition :

Soient  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  ( avec  $a \neq 0$  ).

Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante  $x \in \mathbb{R} / ax + b = 0$  est appelée équation du 1<sup>er</sup> degré d'un seul inconnu  $x$  de  $\mathbb{R}$  et ses coefficients réels sont  $a$  et  $b$ .

#### b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 = 5x - 12$ .
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 = 2x - 12$ .
- $x \in \mathbb{R} / 2(x + 3) = 2x - 12$

#### c. Vocabulaire :

Toute solution d'équation est appelée : solution de l'équation ou racine de l'équation ou zéro de l'équation.

### B. – Inéquation de 1<sup>ère</sup> degré d'un seul inconnu :

#### a. Définition :

Soient  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  ( avec  $a \neq 0$  ).

Toute inéquation son écriture se ramène sous la forme suivante  $x \in \mathbb{R} / ax + b \leq 0$  ou  $x \in \mathbb{R} / ax + b \geq 0$  ou  $x \in \mathbb{R} / ax + b < 0$  ou  $x \in \mathbb{R} / ax + b > 0$  est appelée inéquation du 1<sup>er</sup> degré d'un seul inconnu  $x$  de  $\mathbb{R}$  et ses coefficients réels sont  $a$  et  $b$ .

#### b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 \leq 5x - 12$ .
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 < 2x - 12$ .
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 > 2x - 12$

#### c. Le signe du binôme du 1<sup>er</sup> degré $ax + b$ .

##### 1<sup>er</sup> cas $a > 0$ :

Son signe à l'aide d'un tableau

##### 2<sup>ème</sup> cas $a < 0$ :

Son signe à l'aide d'un tableau

#### d. Exercice :

Donner le signe des binômes suivants :

1.  $2x + 7$  2.  $-3x + 4$  3.  $(2x + 7)(-3x + 4)$

Cas $a > 0$	$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax + b$	-	0	+

Cas $a < 0$	$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax + b$	-	0	+

## II. Equations de 2<sup>ème</sup> degré d'un seul inconnu :

### A. Equations de 2<sup>ème</sup> degré d'un seul inconnu

#### a. Définition :

Soient  $a$  et  $b$  et  $c$  de  $\mathbb{R}$  ( avec  $a \neq 0$  ).

Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  est appelée équation du 2<sup>ème</sup> degré d'un seul inconnu  $x$  de  $\mathbb{R}$  et ses coefficients réels sont  $a$  et  $b$  et  $c$ .



**b. Exemple :**

(E) :  $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$  est -ce que 1 est racine de l'équation (E)

**B. Forme canonique du trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) :**

**a. Activité :**

On considère trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  .

Compléter les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \times [\dots\dots\dots] \\ &= a \times \left[ x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\dots}{\dots} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{\dots}{\dots} \right)^2 - \frac{\dots}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

**b. Vocabulaire :**

• L'écriture  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  est appelée la forme canonique du trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$ . ( $a \neq 0$ )

- Le nombre  $b^2 - 4ac$  est appelé le discriminant du trinôme de second  $ax^2 + bx + c$ .
- Le nombre  $b^2 - 4ac$  est appelé aussi le discriminant de l'équation :  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  .
- le discriminant  $b^2 - 4ac$  on le note par  $\Delta$  on écrit  $\Delta = b^2 - 4ac$  .
- la forme canonique du trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  on l'écrit :

$$a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

• d'où :  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

**c. Exemple :**

On considère l'équation suivante (E) :  $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$ .

1. Calculer le discriminant  $\Delta$  de l'équation (E) .
2. Ecrire l'équation on utilise la forme canonique de  $2x^2 + 4x - 6$  .
3. Résoudre l'équation (E) .

**C. Détermination les solutions de l'équation  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  .**

**a. Activité :**

On a :  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  (la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  )



$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 ; (\text{car } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (1) ; (\text{car } a \neq 0)$$

**1<sup>er</sup> cas :  $\Delta < 0$**

Donc :  $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$  et  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$  d'où l'équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

Ensemble des solution de l'équation (E) est  $S = \emptyset$ .

**2<sup>ème</sup> cas :  $\Delta = 0$**

Donc d'après (1) on obtient :  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

d'où l'équation admet une solution dans  $\mathbb{R}$ .

on dit aussi l'équation admet solution double ( ou deux solutions confondues ) car :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}$$

Ensemble des solution de l'équation (E) est  $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ .

**3<sup>ème</sup> cas :  $\Delta > 0$**

Donc d'après (1) on obtient :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \quad (\text{car } \Delta > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'où l'équation admet deux solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$  :  $x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  ou  $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .



**b. Propriété :**

Soit l'équation :  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$  et son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta > 0$  l'équation admet deux solutions distinctes ( ou deux racines distinctes ) dans  $\mathbb{R}$  :

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$  l'équation admet une solution ( ou deux racines ) dans  $\mathbb{R}$  :  $x = -\frac{b}{2a}$  (solution double) .
- Si  $\Delta < 0$  l'équation n'a pas de solution ( n'a pas de racines ) dans  $\mathbb{R}$ . ( $S = \emptyset$ ) .

**c. Exercice :**

On considère l'équation suivante : (E) :  $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$  .

1. Calculer discriminant  $\Delta$  de l'équation (E) .
2. Donner l'ensemble des solution de l'équation (E) .

**D. La somme et le produit des racines de l'équation  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  :**

**a. Activité :**

On considère l'équation suivante  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  tel qu'il admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  .

1. Donner  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de a et b et c .
2. Calculer  $x_1 + x_2$  puis  $x_1 \times x_2$  ; puis donner la propriété .

**b. Propriété :**

Si l'équation  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$  admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} .$$

**c. Exercice :**

On considère l'exercice précédente (E) :  $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$  .

1. Calculer  $x_1 + x_2$  puis  $x_1 \times x_2$  par deux méthodes différentes .

**E. Factorisation – signe de trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  :**

❖ Factorisation de  $ax^2 + bx + c$  :

**a. Activité :**

On considère le trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  .

1. Donner son discriminant  $\Delta$  en fonction de a et b et c .
2. Donner la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  .
3. D'après le signe de  $\Delta$  donner la factorisation de  $ax^2 + bx + c$  dans les cas possibles en utilisant les racines  $x_1 + x_2$  .



**b. Propriété :**

$\Delta$  est le discriminant de l'équation  $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$  l'équation admet deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  on a :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .
- Si  $\Delta = 0$  l'équation admet une solution  $x_1 = \frac{-b}{2a}$  on a :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ .
- Si  $\Delta < 0$  l'équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  on ne peut pas factoriser  $ax^2 + bx + c$  sous forme de produit de deux polynômes de 1<sup>er</sup> degré (deux monômes).

❖ signe de trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$  :

**a. Activité :**

On considère le trinôme de second degré  $ax^2 + bx + c$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$

On a deux racines  $x_1$  et  $x_2$  on pose  $x_1 < x_2$ .

1. Donner les racines  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $a$  et  $b$  et  $c$
2. Factoriser  $ax^2 + bx + c$ .
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
a	Signe de a	Signe de a	Signe de a	
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	....	....	0	....
$a(x - x_1)(x - x_2)$	....	0	....	0
$ax^2 + bx + c$	Signe de ....	Signe de ....	Signe de ....	

4. En déduit le signe de  $ax^2 + bx + c$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $\Delta = 0$

On a une racine double  $x_1$ .

1. Donner la racine double en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Factoriser  $ax^2 + bx + c$ .
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
a	Signe de a	Signe de a	
$(x - x_1)^2$	+	0	+
$a(x - x_1)^2$	.....	0	.....
$ax^2 + bx + c$	Signe de ....	....	Signe de ....

4. En déduit le signe de  $ax^2 + bx + c$ .



5. Donner la propriété :

b. Propriété :

$\Delta$  est le discriminant du trinôme de second  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta > 0$  et  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines distinctes du trinôme de second  $P(x)$  alors :
  - ✓ à l'extérieure des racines  $x_1$  et  $x_2$  le signe de  $P(x)$  est celui de  $a$ .
  - ✓ entre les racines  $x_1$  et  $x_2$  le signe de  $P(x)$  est le contraire du signe de  $a$ .
  - ✓ on a :  $P(x_1) = 0$  et  $P(x_2) = 0$ .
- Si  $\Delta = 0$  et  $x_1$  est la racine distincte du trinôme de second  $P(x)$  alors :
  - ✓ le signe de  $P(x)$  est celui de  $a$  pour tout  $x \neq \frac{-b}{a}$ . (c.à.d.  $x \neq x_1$ )
  - ✓  $P(x)$  s'annule pour  $x = \frac{-b}{a}$ . (c.à.d.  $P\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$ ).
- Si  $\Delta < 0$  trinôme de second  $P(x)$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}$  on ne peut pas factoriser  $P(x)$  et son signe est celui de  $a$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

c. Exercice :

On considère l'équation suivante :  $(E) : x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$ .

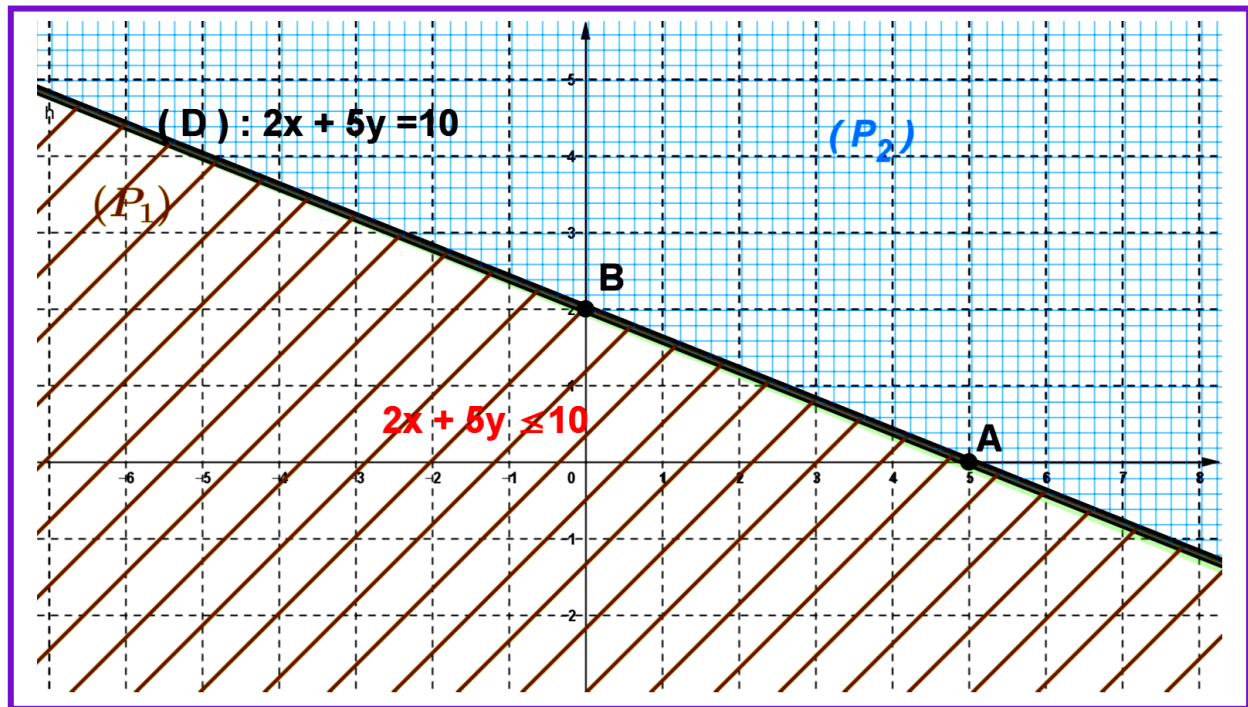
1. Résoudre l'équation  $(E)$ .
2. Factoriser  $2x^2 + 4x - 6$ .
3. Donner le signe de  $2x^2 + 4x - 6$ .
4. En déduit l'ensemble de solution de l'inéquation :  $(E') : x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 \leq 0$ .

### III. Equations et inéquations de 1<sup>ère</sup> degré à deux inconnues : (méthode graphique)

a. Activité :

On considère l'équation suivante :  $(E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y = 10$ .

1. Est-ce que le couple  $(5, 0)$  vérifie l'équation  $(E)$  ?
2. Est-ce que le couple  $(0, 2)$  vérifie l'équation  $(E)$  ?
3. On considère le plan  $(P)$  est rapporté au repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  et  $M(x, y) \in (P)$  et vérifie  $2x + 5y = 10$ .
  - a. Que représente l'équation  $2x + 5y = 10$  dans le plan  $(P)$ .
  - b. En déduit l'ensemble des points  $M(x, y) \in (P)$  qui vérifie  $2x + 5y = 10$ .
  - c. Construire la droite  $(D)$  d'équation cartésienne  $(D) : 2x + 5y = 10$ .
  - d. noté sur la figure le demi plan  $(\mathcal{G}_1)$  de bord ( ou de frontière ) la droite  $(D)$  qui contient le point  $O(0, 0)$  l'autre demi plan sera noté  $(\mathcal{G}_2)$ .
  - e.



4. On considère l'inéquation suivante :  $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y \leq 10$ .

- Prenez plusieurs points  $A(x, y)$  quelconque de  $(P_1)$  puis vérifiez est-ce que leurs coordonnées  $(x, y)$  sont solutions de l'inéquation  $(I)$ .
- Prenez plusieurs points  $B(x, y)$  quelconque de  $(P_2)$  puis vérifiez est-ce que leurs coordonnées  $(x, y)$  sont solutions de l'inéquation  $(I)$ .

**b. Méthode graphique :**

Pour résoudre graphiquement les inéquations :

- ✓  $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \leq 0$  ou  $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c < 0$ .
- ✓  $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \geq 0$  ou  $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c > 0$ .

On suit les étapes suivantes :

- On construit la droite d'équation :  $(D) : ax + by + c = 0$  dans un plan  $(P)$  muni d'un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .
- On place un point  $A(e, f)$  sur le plan  $(P)$  tel que :  $A(e, f) \notin (D)$ .
- On désigne (arbitrairement) par  $(P_1)$  le demi-plan de bord  $(D)$  qui contient  $A(e, f)$ , l'autre demi-plan par  $(P_2)$ .
- Si les coordonnées  $(e, f)$  de  $A$  vérifient l'inéquation  $(I)$  donc l'ensemble des solutions de  $(I)$  toutes les coordonnées des points de ce demi-plan  $(P_1)$  fermé (c.à.d. contient la droite  $(D)$ ) si l'inéquation  $(I)$  est écrite avec les symboles  $\leq$  ou  $\geq$  si non toutes les coordonnées des points de ce demi-plan  $(P_1)$  ouvert.





- Si les coordonnées  $(e, f)$  de  $A$  ne vérifie pas l'inéquation  $(I)$  donc l'ensemble des solutions de  $(I)$  toutes les coordonnées des points de l'autre demi plan  $(\mathcal{P}_2)$  fermé [ avec bien sûr (c.à.d. contient la droite  $(D)$  si l'inéquation  $(I)$  est écrit avec les symboles  $\leq$  ou  $\geq$  si non toutes les coordonnées des points de ce demi plan  $(\mathcal{P}_2)$  ouvert ].

#### IV. Système de deux équations de premières degré à deux inconnues :

##### a. Déterminants d'un système :

###### ❖ Définition :

On considère le système suivant  $(S) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ .

- Le nombre  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$  est appelé le déterminant du système  $(S)$ .
- Le nombre  $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$  est appelé le déterminant pour déterminer  $x$ .
- Le nombre  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$  est appelé le déterminant pour déterminer  $y$ .

###### ❖ propriété :

On considère le système suivant  $(S) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ .

1<sup>er</sup> cas  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une et une solution c'est le couple  $\left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$ .

d'où l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \left\{ \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$ .

2<sup>ème</sup> cas  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$  on a :

a. si  $\Delta_x \neq 0$  ou  $\Delta_y \neq 0$  le système n' pas de solution, d'où l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \emptyset$

b. si  $\Delta_x = 0$  et  $\Delta_y = 0$  le système se ramène a une seule équation ( on prend une par exemple

$(S) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$ ) le système a une infinité de solutions. d'où l'ensemble des solutions de

$(S)$  est  $S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$  (si  $a \neq 0$ ) (si  $b \neq 0$   $S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, x \in \mathbb{R} \right\}$ ).

##### b. Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants on utilise la méthode des déterminants

a.  $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x + 10y = 7 \end{cases}$  b.  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$  c.  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 7 \end{cases}$