

# Equations et inéquations et systèmes partie1

Leçon : *Equations et inéquations et systèmes partie1*

Présentation globale

Chapitre n° 1

## I) Les équations et les inéquations du premier degré a une inconnue.

- 1 Les équations du premier degré a une inconnue
- 2 Les inéquations du premier degré a une inconnue.

### I) Les équations et les inéquations du premier degré a une inconnue.

#### 1°) Les équations du premier degré a une inconnue.

**Définition :** On appelle équations du premier degré a une inconnue toute équation de la forme :  $ax + b = 0$  où les coefficients  $a, b$  sont des réels donnés et  $x$  est l'inconnue. Résoudre l'équation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées :  $S$

**Applications :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) -2x + 22 = 0 \quad 2) \quad 3(2x + 5) = 6x - 1$$

$$3) 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4)$$

$$4) 2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 4) = 0 \quad 5) \quad x^2 - 100 = 0$$

$$6) \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2} = 0 \quad 7) \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$$

$$8) \frac{4x+2}{x-3} = 5 \quad 9) |7x-10| = |6+3x| \quad 10) \quad x^3 - 7x = 0$$

**Solution :** 1)  $-2x + 22 = 0$ ssi  $-2x + 22 - 22 = -22$ ssi

$$-2x = -22 \text{ssi } -2x \times \left(\frac{1}{-2}\right) = -22 \times \left(\frac{1}{-2}\right) \text{ssi } x = 11$$

Donc :  $S = \{11\}$

$$2) 3(2x + 5) = 6x - 1 \text{ssi } 6x + 15 = 6x - 1 \text{ssi}$$

$$6x - 6x = -1 - 15$$

ssi  $0x = -16$ ssi  $0 = -16$  ceci est impossible

Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \emptyset$

$$3) 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4)$$

$$\text{ssi } 4x - 8 = 6x - 2x - 8 \text{ssi } 4x - 4x + 8 - 8 = 0$$

ssi  $0 = 0$  Donc l'ensemble de toutes les solutions est :

$S = \mathbb{R}$

$$4) (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 4) = 0$$

ce qui est équivalent à :  $(2x + 3)(2x + 3 - x + 4) = 0$

ce qui est équivalent à :  $(2x + 3)(x + 7) = 0$

Les solutions sont  $-3/2$  ou  $-7$ .

Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \{-7; -3/2\}$

$$5) \quad x^2 - 100 = 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$\iff x^2 - 10^2 = 0$$

C'est une identité remarquable de la forme :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \text{ donc}$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$\iff (x - 10)(x + 10) = 0$$

$$\iff x = 10 \text{ ou } x = -10$$

D'où :  $S = \{-10; 10\}$

$$6) \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2} = 0$$

Cette équation n'existe pas

si  $x + 2 = 0$  et si  $x - 2 = 0$ . Les valeurs interdites de cette équation sont  $-2$  et  $2$ . L'équation est donc définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

On commence par réduire au même dénominateur les deux fractions. Le dénominateur commun est  $(x + 2)(x - 2)$ . Donc :  $-2x - 16 = 0$  car le dénominateur ne peut pas s'annuler.

$$\iff -2x = 16$$

$$\iff x = \frac{16}{-2}$$

$$\iff x = -8$$

D'où :  $-8$  appartient à l'ensemble de définition de l'équation, donc :  $S = \{-8\}$

$$7) \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$$

Cette équation existe si  $x^2 - 9 \neq 0$

$$x^2 - 9 = 0 \text{ Équivalent à : } x^2 - 3^2 = 0 \text{ équivalent à : }$$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

Équivalent à  $x+3=0$  ou  $x-3=0$  équivalent à  $x = -3$  ou  $x = 3$

Les valeurs interdites de cette équation sont -3 et 3.

L'équation est donc définie sur  $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ .

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0 \text{ équivalent à } (x-7)(x+3) = 0$$

équivalent à  $x-7=0$  ou  $x+3=0$

Équivalent à  $x=-7 \in D_E$  ou  $x=-3 \notin D_E$  :

donc :  $S = \{-7\}$

$$8) \frac{4x+2}{x-3} = 5 \text{ Cette équation n'existe pas si } x-3=0$$

$x-3=0$  équivalent à :  $x=3$

La valeur interdite de cette équation est 3. L'équation est donc définie sur  $D_E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

$$\frac{4x+2}{x-3} = 5 \text{ équivalent à : } 4x+2 = 5(x-3) \text{ équivalent à :}$$

$$4x+2 = 5x-15$$

équivalent à :  $-x=-17$  équivalent à :  $x=17$

donc :  $S = \{17\}$

$$9) |7x-10| = |6+3x| \text{ équivalent à } 7x-10 = 6+3x \text{ ou } 7x-10 = -(6+3x)$$

équivalent à  $4x=16$  ou  $10x=4$  équivalent à  $x=4$  ou  $x=2/5$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \{4; 2/5\}$

$$10) x^3 - 7x = 0 \text{ équivalent à : } x(x^2 - 7) = 0 \text{ssi}$$

$$x=0 \text{ ou } x^2 - 7 = 0$$

équivalent à  $x=0$  ou  $x^2 = 7$ ssi  $x=0$  ou

$$x=\sqrt{7} \text{ ou } x=-\sqrt{7}$$

D'où :  $S = \{-\sqrt{7}; 0; \sqrt{7}\}$

**Exercice :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$a) \frac{3x+5}{x-1} = 0 \quad b) \frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0 \quad c)$$

$$\frac{x^2 - 9}{x+3} = 0 \quad d) 1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$$

**Solution :** a) L'équation n'est pas définie pour  $x=1$ .

$$\text{Pour } x \neq 1, \text{l'équation } \frac{3x+5}{x-1} = 0 \text{ équivaut à :}$$

$$3x+5=0.$$

$$\text{D'où } x = -\frac{5}{3}. \quad \text{c a d : } S = \{-5/3\}$$

b) L'équation n'est pas définie pour  $x=4$ .

Pour  $x \neq 4$ , l'équation  $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$  équivaut à :

$$(2x+1)(x-3) = 0 \text{ Soit : } 2x+1=0 \text{ ou } x-3=0$$

Les solutions sont :  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = 3$ .

c a d :  $S = \{-1/2; 3\}$

c) L'équation n'est pas définie pour  $x=-3$ .

$$\text{Pour } x \neq -3, \text{l'équation } \frac{x^2 - 9}{x+3} = 0 \text{ équivaut à :}$$

$$x^2 - 9 = 0, \text{ soit } x^2 = 9$$

Soit encore :  $x = 3$  ou  $x = -3$ .

Comme  $x \neq -3$ , l'équation a pour unique solution :  $x = 3$ .

c a d :  $S = \{3\}$

d) L'équation n'est pas définie pour  $x=2$  et  $x=3$ .

$$\text{Pour } x \neq 2 \text{ et } x \neq 3, \text{l'équation } 1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$$

équivaut à :  $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$  On réduit au même

$$\text{dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient : } \frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x) - (x+3)(2-x) - 2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0 \text{ On développe}$$

$$\frac{2x - x^2 - 6 + 3x - 2x + x^2 - 6 + 3x - 2x + 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x - 6}{(x-3)(2-x)} = 0 \text{ Ce qui équivaut à } 4x - 6 = 0 \text{ et}$$

$$(x-3)(2-x) \neq 0$$

$$\text{D'où } x = \frac{3}{2}. \text{ c a d : } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

**2°) Les inéquations du premier degré a une inconnue.**

**a) Le signe du binôme  $ax+b$   $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$**

**Exemples :** 1) étudions le signe de :  $3x+6$

(coeffient de x positif )

$$3x+6 > 0 \text{ Équivalent à : } x > -2$$

$$3x+6 < 0 \text{ Équivalent à : } x < -2$$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$3x+6$	$-$	$0$	$+$

2) étudions le signe de :  $-2x+12$

(coeffient de x négatif )

$$-2x+12 > 0 \text{ Équivalent à : } x < 6$$

$$-2x+12 > 0 \text{ Équivalent à : } x < 6$$

$$-2x+12 < 0 \text{ Équivalent à : } x > 6$$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	+	0	-

Résumé :  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de $a$

## b) Solution de l'inéquations du premier degré à une inconnue

**Définition :** On appelle inéquations du premier degré à une inconnue toute inéquation de la forme :  $ax+b \geq 0$  ou  $ax+b \leq 0$  ou  $ax+b < 0$  ou  $ax+b > 0$  où les coefficients  $a, b$  sont des réels donnés et  $x$  est l'inconnue. Résoudre l'inéquation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées :  $S$

**Applications :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$1) -2x+12 > 0 \quad 2) 5x-15 \leq 0$$

$$3) 4x^2 - 9 \geq 0 \quad 4) (1-x)(2x+4) > 0$$

$$5) \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \quad 6) \frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0$$

**Solution :** 1)  $-2x+12 > 0$

$$-2x+12=0 \text{ équivalent à : } x=6 \quad -2=a \text{ et } a < 0$$

coefficient de  $x$  négatif

On a le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	+	0	-

$$\text{Donc : } S = ]-\infty; 6[$$

$$2) 5x-15 \leq 0$$

$$5x-15=0 \text{ Équivalent à : } x=3 \quad 5=a \text{ et } a > 0$$

coefficient de  $x$  positif

On a le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15$	-	0	+

$$\text{Donc : } S = ]-\infty; 3[$$

$$3) 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \text{ équivalent à : } (2x)^2 - 3^2 = 0 \text{ ssi}$$

$$(2x-3)(2x+3) = 0$$

$$\text{équivalent à } 2x+3=0 \text{ ou } 2x-3=0$$

$$\text{ssi } x = \frac{-3}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

On a le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-3/2$	$3/2$	$+\infty$
$2x-3$	-	-	0	+
$2x+3$	-	0	+	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	-	0

$$\text{Donc : } S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$4) (1-x)(2x+4) > 0$$

$$(1-x)(2x+4) = 0 \text{ Équivalent à :}$$

$$2x+4=0 \text{ ou } 1-x=0 \text{ ssi } x=-2 \text{ ou } x=1$$

On a le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	
$1-x$	+		0	-
$(2x+4)(1-x)$	-	0	+	-

$$\text{Donc : } S = ]-2; 1[$$

$$5) \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \text{ (Signe d'un quotient méthode)}$$

• Donner l'ensemble de définition.

• Rechercher les valeurs de  $x$  annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+). Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif

Cette inéquation existe si  $1+3x \neq 0$

$$1+3x=0 \text{ équivalent à : } x = -\frac{1}{3}$$

La valeur interdite de cette inéquation est  $-\frac{1}{3}$ . L'inéquation

est donc définie sur  $D_I = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

$$5x-2=0 \text{ Équivalent à : } x = \frac{2}{5}$$

On a le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x-2$	-	-	0	+
$1+3x$	-	0	+	+
$\frac{5x-2}{1+3x}$	+	-	0	+

Attention à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite donc :  $S = \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[ \cup \left[ \frac{2}{5}; +\infty \right[$

$$6) \frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0$$

Cette inéquation existe si  $2x-6 \neq 0$

$$2x-6 \neq 0 \text{ équivalent à : } x = -\frac{1}{3}$$

La valeur interdite de cette inéquation est  $-\frac{1}{3}$ . l'inéquation est donc définie sur  $D_I = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

$$2x-6 \neq 0 \text{ Équivalent à : } x \neq 3$$

On a le tableau de signe suivant :  $D_I = \mathbb{R} - \{3\}$

$$2x+1=0 \text{ équivalent à : } x = -\frac{1}{2}$$

$$5x-10=0 \text{ équivalent à : } x = 2$$

$x$	$-\infty$	$-1/2$	$2$	$3$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$5x-10$	-	-	0	+	+
$2x-6$	-	-	-	0	+
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{(2x-6)}$	-	0	+	0	-

$$\text{Donc : } S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[ \cup \left[ 2; 3 \right[$$

**Exercice :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$1) (3-6x)(x+2) > 0 \quad 2) \frac{2-6x}{3x-2} \notin 0$$

**Solution :** 1) Le signe de  $(3-6x)(x+2)$  dépend du signe de chaque facteur

$$3-6x \text{ et } x+2.$$

$$3-6x=0 \text{ ou } x+2=0$$

$$6x=3 \text{ ou } x=-2$$

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2$$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.

En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit  $(3-6x)(x+2)$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3-6x$	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+
$(3-6x)(x+2)$	-	0	+	-

On en déduit que  $(3-6x)(x+2) > 0$  pour  $x \in \left] -2; \frac{1}{2} \right[$ .

L'ensemble des solutions de l'inéquation

$$(3-6x)(x+2) > 0 \text{ est } \left] -2; \frac{1}{2} \right[.$$

$$2) \frac{2-6x}{3x-2} \notin 0.$$

L'inéquation n'est pas définie pour  $3x-2=0$ , soit  $x = \frac{2}{3}$ .

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de  $\frac{2-6x}{3x-2}$  dépend du signe des expressions  $2-6x$  et  $3x-2$ .

$$2-6x=0 \text{ équivaut à } x = \frac{1}{3}.$$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2-6x$	+	0	-	-
$3x-2$	-	-	0	+
$\frac{2-6x}{3x-2}$	-	0	+	-

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour  $x = \frac{2}{3}$ .

On en déduit que  $\frac{2-6x}{3x-2} \notin 0$  pour  $x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[ \cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$ .

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $\frac{2-6x}{3x-2} \notin 0$  est  $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[ \cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$ .

## II) Les équations et les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

### 1) les équations du premier degré avec deux inconnues.

**Définition :** On appelle équations du premier degré à deux inconnues toute équation de la forme :  $ax+by+c=0$  où les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont des réels donnés et le couple  $(x; y)$  est l'inconnue dans  $\mathbb{R}^2$

Résoudre l'équations dans  $\mathbb{R}^2$  c'est déterminer l'ensemble  $S$  des couples solutions de l'équations

**Remarques :**

- L'équation  $ax + by + c = 0$  a une infinité de solutions
- On peut résoudre l'équation  $ax + by + c = 0$  graphiquement ou algébriquement

**Applications :** 1) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$

l'équation  $\therefore 2x - y + 4 = 0$

On a  $2x - y + 4 = 0$  équivalent à :  $y = 2x + 4$

Donc :  $S = \{(x; 2x + 4) / x \in \mathbb{R}\}$

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :  $x - 2y + 1 = 0$

On a  $x - 2y + 1 = 0$  équivalent à :  $x = 2y - 1$

Donc :  $S = \{(2y - 1; y) / y \in \mathbb{R}\}$

3) Résolvons graphiquement dans  $\mathbb{R}^2$

l'équation :  $x - y - 2 = 0$

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On trace la droite (D) d'équation cartésienne :

$$x - y - 2 = 0$$

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / M(x; y) \in (D)\}$$

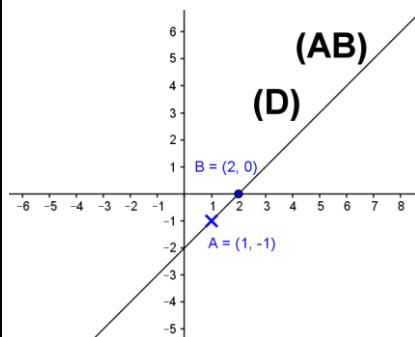
Pour tracer la droite (D) il suffit de trouver deux points qui appartiennent à (D)

Si  $x = 1$  alors :  $1 - y - 2 = 0$  c ad  $y = -1$  donc

$$A(1; -1) \in (D)$$

Si  $y = 0$  alors :  $x - 0 - 2 = 0$  c ad  $x = 2$

$$\text{donc } B(2; 0) \in (D)$$



**EXERCICE :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les équations suivantes :

$$1) 2x - y + 1 = 2y - 2x + 5 \quad 2) x + 5 = y + 5$$

$$3) 3x + 2y - 2 = 2y - 2 \quad 4) x + y = 2x - 1$$

**Solution :** 1) On a  $2x - y + 1 = 2y - 2x + 5$  équivalent à :  $4x - 3y - 4 = 0$

$$\text{Équivalent à : } 4x = 3y + 4 \text{ équivalent à : } x = \frac{3}{4}y + 1$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left( \frac{3}{4}y + 1; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

2) On a  $x + 5 = y + 5$  équivalent à :  $y = x$

$$\text{Donc : } S = \{(x; x) / x \in \mathbb{R}\}$$

3) On a  $3x + 2y - 2 = 2y - 2$  équivalent à :  $3x = 0$  ssi  $x = 0$  Donc :  $S = \{(0; y) / y \in \mathbb{R}\}$

4) On a  $x + y = 2x - 1$  équivalent à :  $-x + y + 1 = 0$  ssi  $y = x - 1$  Donc :  $S = \{(x; x - 1) / x \in \mathbb{R}\}$

## 2) les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

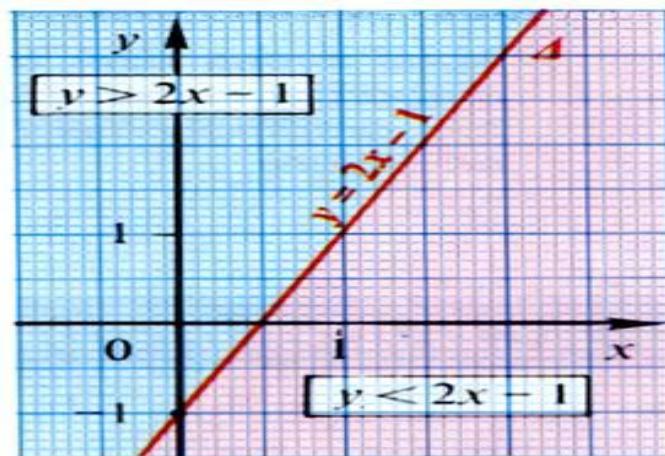
**Activité :** résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'inéquation :  $y - 2x + 1 > 0$

Soit l'équation  $y - 2x + 1 = 0$

on trace de la droite d'équation  $y = 2x - 1$ .

Cette droite partage le plan en deux demi-plans.

On peut observer sur le graphe ci-contre :



- Tous les points de la zone « bleu » ont les coordonnées qui vérifient  $y > 2x - 1$

- Tous les points de la zone « rouge » ont les coordonnées qui vérifient  $y < 2x - 1$

Si  $y - 2x + 1 = 0$  (1)

Soit un point A (1 ; 4) (choisi au hasard, à la gauche de la droite) on remplace ces valeurs dans l'équation (1)

Alors : 4 - 2 fois 1 + 1 = 1 ; cela signifie que le point A est dans la zone  $y - 2x + 1 > 0$

Soit un point B (2 ; 1) (choisi au hasard, à la droite de la droite) on remplace ces valeurs dans l'équation (1)

Alors : 1 - 2 fois 2 + 1 = -3 ; cela signifie que le point B est dans la zone  $y - 2x + 1 < 0$

On peut essayer de savoir si le point d'origine O (0 ; 0) appartient à la zone «  $y - 2x + 1 > 0$  » ou à la zone «  $y - 2x + 1 < 0$  » en remplaçant  $y=0$  et  $x=0$  dans l'équation «  $y - 2x + 1 = 0$  » ;

Le résultat donne « 1 » ; donc le point O appartient à la zone «  $y - 2x + 1 > 0$  »

Donc les solution de l'inéquation  $y - 2x + 1 > 0$  est l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du demi- plan (la zone « bleu ») qui contient le point  $O(0;0)$  privé de la droite  $(D)$

**Remarques :** Si la droite passe par l'origine, on 'essaie' un autre point bien choisi.

Si l'inégalité est au sens large, on doit « ajouter » aux points du demi -plan les points de la droite « frontière ».

### Application : Exemple1 :

Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$  l'inéquation :  $2x - y - 2 < 0$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite  $(D)$  :  $2x - y - 2 = 0$

Cette droite passe par les points  $A(0; -2)$  et  $B(1; 0)$  détermine

Deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$

(Il nous reste à trouver lequel des deux demi plans qui est la solution de l'inéquation.)

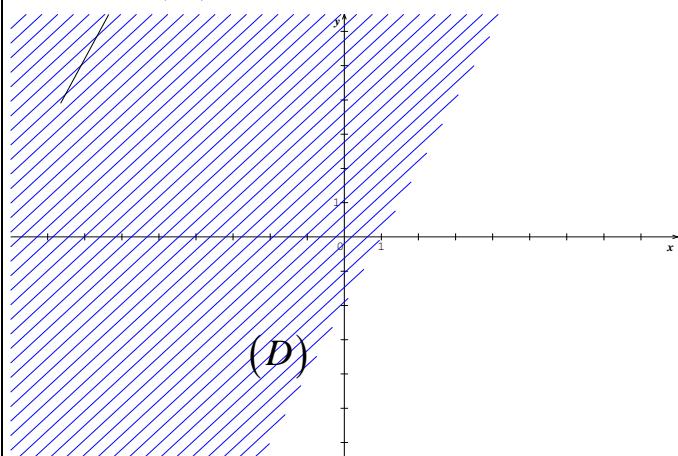
(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.

Conseil : On choisit, de référence, le point «  $O$  » de coordonnées  $(0 ; 0)$  ; c'est-à-dire  $x = 0$  et  $y = 0$  . Les calculs sont donc simplifiés. (Si la droite passe par «  $O$  », on prendra un autre point...)

Soit  $O(0;0)$  On a  $2 \times 0 - 0 - 2 < 0$

Donc : les coordonnes  $(0 ; 0)$  vérifie l'inéquation.

Donc les solution de l'inéquation  $2x - y - 2 < 0$  est l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du demi- plan  $P_1$  hachuré qui contient le point  $O(0;0)$  privé de la droite  $(D)$



### Exemple2 : d'application :

Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$  l'inéquation :  $x - y - 3 \geq 0$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite  $(D)$  ::  $x - y - 3 = 0$  détermine

Deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$

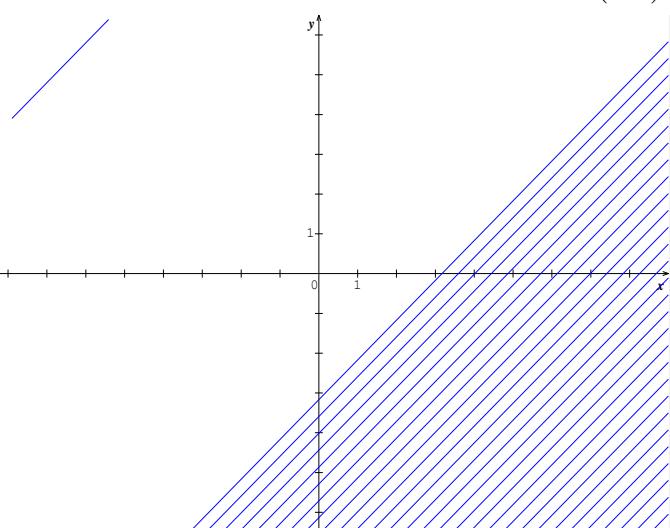
Cette droite passe par les points  $A(0; -3)$  et  $B(1; -2)$

On a  $0 - 0 - 3 \geq 0$  c a d  $-3 \geq 0$  on constate que le résultat est impossible

donc : les coordonnes  $(0 ; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les solutions de l'inéquation  $x - y - 3 \geq 0$  est

l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du demi- plan  $P_1$  hachuré qui ne contient pas le point  $O(0;0)$



### Exemple3 : d'application :

Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$  l'inéquation :  $2x - y < 0$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite  $(D)$  ::  $2x - y = 0$

Cette droite passe par les points  $O(0;0)$  et

$A(1; 2)$  détermine Deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$

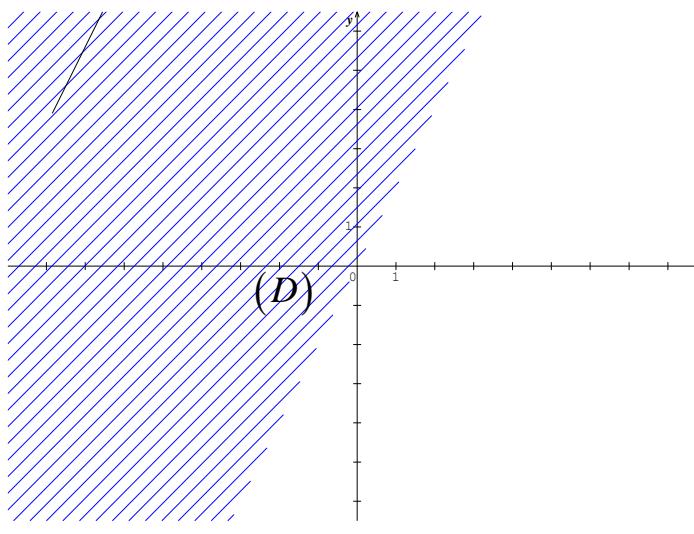
on prendra un autre point  $B(1; 1)$

On a  $2 \times 1 - 1 < 0$  c a d  $1 < 0$  on constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnes  $(1; 1)$  ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les solution de l'inéquation  $x - y - 3 \geq 0$  est

l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du demi- plan  $P_1$  hachuré qui ne contient pas le point  $(1; 1)$



**Exemple4 :** Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$

l'inéquation :  $3x + 2y < 2x + 2y - 1$

**Solution :**

$$3x + 2y < 2x + 2y - 1 \text{ ssi}$$

$$3x - 2x + 2y - 2y + 1 < 0$$

$$\text{ssi } x + 1 < 0$$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

$$\text{L'équation de la droite } (D) : x + 1 = 0 \text{ ssi } x = -1$$

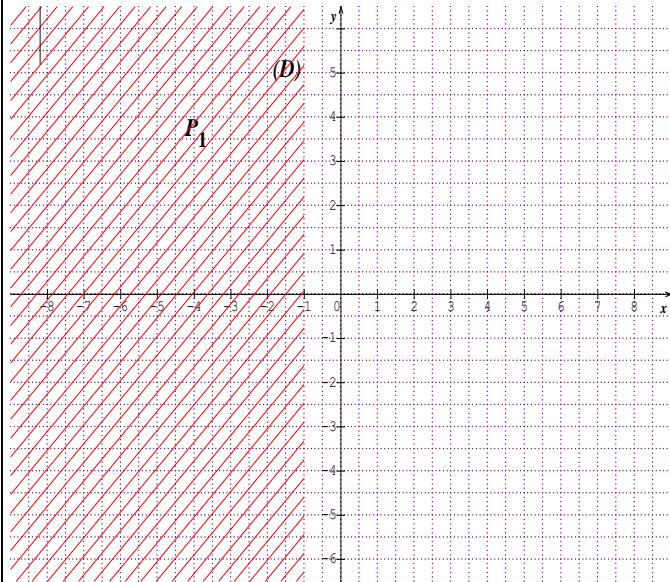
Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point  $(-1; 0)$  et détermine Deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$

$$\text{Soit } O(0; 0) \text{ On a } 0 + 1 < 0 \text{ ssi } 1 < 0$$

On constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnées  $O(0; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les solutions de l'inéquation  $x + 1 < 0$  est l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du demi-plan  $P_1$  hachuré qui ne contient pas le point  $O(0; 0)$



**Exemple5 :** Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$  le système d'inéquations

$$\text{suivant : } (S) \begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ -x + 2y + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{L'équation de la droite } (D_1) : x + y - 1 = 0$$

$$\text{L'équation de la droite } (D_2) : -x + 2y + 2 = 0$$

Soit  $O(0; 0)$  On a  $0 + 0 - 1 \geq 0$  ssi  $-1 \geq 0$  Donc :

les coordonnées  $O(0; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

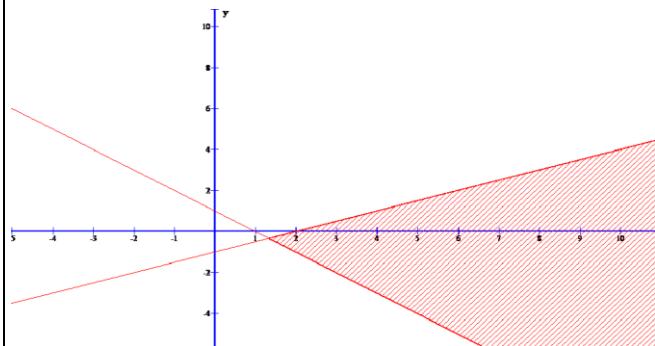
$$x + y - 1 \geq 0$$

$$\text{Soit } O(0; 0) \text{ On a } -0 + 2 \times 0 + 2 \leq 0 \text{ ssi } 2 \leq 0$$

Donc : les coordonnées  $O(0; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

$$-x + 2y + 2 \leq 0$$

Donc les solutions du système est l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du plan colorés



**Exemple6 :** Résoudre Dans  $\mathbb{R}^2$  le système d'inéquations

$$\text{suivant : } (S) \begin{cases} 2x + y - 3 \geq 0 \\ -x + y + 5 \leq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{L'équation de la droite } (D_1) : 2x + y - 3 = 0$$

$$\text{L'équation de la droite } (D_2) : -x + y + 5 = 0$$

$$\text{L'équation de la droite } (D_3) : x - 4 = 0$$

$$\text{Soit } O(0; 0) \text{ On a } 2 \times 0 + 0 - 3 \geq 0 \text{ ssi } -3 \geq 0$$

Donc : les coordonnées  $O(0; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

$$2x + y - 3 \geq 0$$

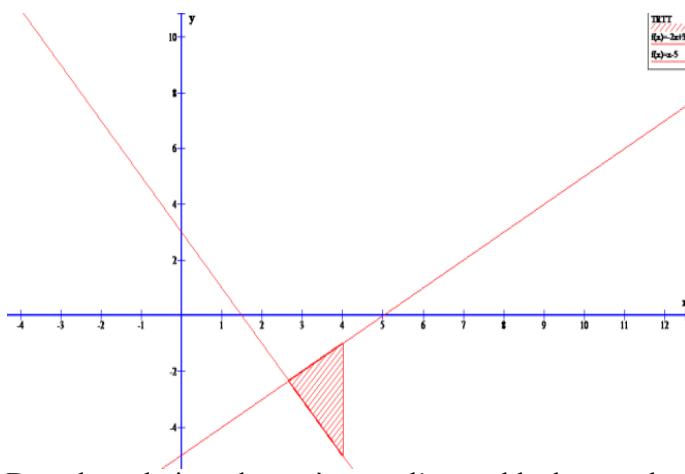
$$\text{Soit } O(0; 0) \text{ On a } -0 + 0 + 5 \leq 0 \text{ ssi } 5 \leq 0 \text{ Donc :}$$

les coordonnées  $O(0; 0)$  ne vérifie pas l'inéquation.

$$-x + y + 5 \leq 0$$

Soit  $O(0;0)$  On a  $0 \leq 4$  Donc : les

coordonnées  $O(0;0)$  vérifie l'inéquation.  $x \leq 4$



Donc les solutions du système est l'ensemble des couple  $(x; y)$  des points  $M(x; y)$  du plan colorés

**Exemple7 :** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 < 0 & (1) \\ x - 2y + 2 < 0 & (2) \\ 4x - 3y + 12 > 0 & (3) \end{cases}$$

Etant donnés deux axes de coordonnées « O x » et « O y » nous allons déterminer dans quelle région du plan se trouvent les points « M » dont les coordonnées satisfont à ces trois inéquations.

Pour cela construisons les droites qui ont respectivement pour équations :

$$(1) 3x + 2y - 6 = 0 \text{ (D)}$$

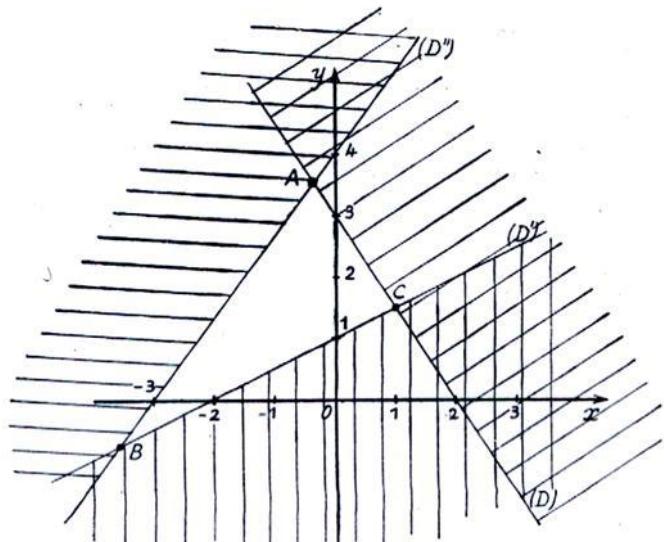
$$(2) x - 2y + 2 = 0 \text{ (D')}$$

$$(3) 4x - 3y + 12 = 0 \text{ (D'')}$$

Pour que l'inéquation (1) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la région qui contient l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation est satisfaite).

Pour que l'inéquation (2) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la région qui ne contient pas l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation n'est pas satisfaite).

Enfin pour que l'inéquation (3) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la région qui contient l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation est satisfaite).



Finalement, on voit que « M » doit être à l'intérieur du triangle ABC formé par les 3 droites (D) ; (D') ; (D'').

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices  
Que l'on devient un mathématicien

