Exercices d'application **PROF : ATMANI NAJIB** **Tronc CS**
Avec solutions

Les polynômes

Exercice1 : Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés : $a \in \mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$; $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$; $O(x)=4$; $E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

Solution :

$P(x)$ est un polynôme et $d^\circ P=3$

$Q(x)$ et $R(x)$ et $N(x)$ ne sont pas des polynômes

$M(x)$ est un polynôme et $d^\circ M=4$

$O(x)$ est un polynôme et $d^\circ O=0$

$E(x)$ est un polynôme

Si $a-1\neq 0$ cad $a\neq 1$ alors $d^\circ E=4$

Si $a=1$ alors $d^\circ E=2$

Exercice2 : Exercice1 : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme :

$P(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(0)=5$ donc $a\times 0^2+b\times 0+c=5$ donc $c=5$

On a $P(1)=5$ donc $a\times 1^2+b\times 1+c=5$ donc

$a+b+c=5$ donc $a+b+5=5$

donc $a+b=0$ ①

On a $P(-2)=3$ donc $a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=3$

donc $4a-2b+5=3$

donc $4a-2b=-2$ ②

donc On a le système suivant : $\begin{cases}4a-2b=-2\\ a+b=0\end{cases}$ donc

$\begin{cases}4a-2b=-2\\ b=-a\end{cases}$ donc $4a+2a=-2$ donc $6a=-2$ donc

$a=-\frac{1}{3}$ donc $b=\frac{1}{3}$ Alors : $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+5$

Exercice3 : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et

$R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution :

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (Q) = 3

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (P) =3

Donc : $P(x)=Q(x)$ car deg (P) = deg (Q) et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

Mais $P(x)\neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Exercice4 : soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et

$Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ c a d $P(x)=Q(x)$ donc On a le système suivant :

$\begin{cases}a=0\\ b+c=1\\ c+d=-2\\ d=1\\ c=-1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=0; d=1; c=-1\\ c=-2-d=-2-1=-3\\ b=1-c=1+3=4\end{cases}$

donc $Q(x)=x^4-2x^3+x^2-1$

Exercice5 : soit les polynômes suivants :

$P(x)=12x^4-36x^3+47x^2-30x+7$

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

Déterminer a ; b ; c pour que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ ssi $P(x)=Q(x)$ pout tout x

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

$=2ax^4+2bx^3+2cx^2-3ax^3-3bx^2-3cx+ax^2+bx+c$

$Q(x)=2ax^4+(2b-3a)x^3+(2c-3b+a)x^2+(b-3c)x+c$

Donc : $\begin{cases}2a=12\\ 2b-3a=-36\\ a-3b+2c=47\\ b-3c=-30\\ c=7\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}a=0\\ b=-9\\ c=7\end{cases}$

On vérifie que : $a-3b+2c=47$ est vraie

Donc : $Q(x)=(2x^2-3x+1)(6x^2-9x+7)$

Exercice6 : étudier l'égalité des polynômes dans les cas suivants :

1) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ et $Q(x)=x^2(3x-2)+x$

2) $P(x)=(x-1)^3$ et $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

Solution :

1) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x=x^3+2x^3-2x^2+x=3x^3-2x^2+x$

$Q(x)=x^2(3x-2)+x=3x^3-2x^2+x=P(x)$

$P(x)=(x-1)^3$ 2) $=x^3-3x^2+3x-1$

Donc : $Q(x)\neq P(x)$ car $(3\neq-3)$

Exercice7 : 1): soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I)Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II)Calculer $P(x)\times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer :

deg (PQ) et deg (P) +deg (Q)

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Solution : I) 1) $P(x)=x^3+2x^2-1$;

$Q(x)=3x^4-x^3+x$

On a : $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$

donc $P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$

On a : $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x$

$P(x)-Q(x)=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x$

$3P(x)-2Q(x)=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$

$\deg(P)=3$; $\deg(Q)=4$; $\deg(P+Q)=4$;

$\deg(P-Q)=4$

I) 2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

On a : $P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$

On a : $P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10$

$3P(x)-2Q(x)=5x^5-5x^2+19$

$\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$; $\deg(P+Q)=0$;

$\deg(P-Q)=5$

II) 1) on a $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

$P(x)\times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$

$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2\times1+1=x^4-2x^2+1$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$P(x)\times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$

$\deg(P\times Q)=5$ $\deg(P)=4$; $\deg(Q)=1$

Donc $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ et

$\deg(P^2)=2\deg(P)$

Exercice8 : soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Est-ce que les nombres suivants sont des racines du polynôme $P(x)$ (justifier) ? 1 ;2 ;3 ; -2

Solution :

$P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

$P(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=8-8-10+6=-4\neq0$

donc 2 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

$P(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=27-18-15+6=0$

donc 3 est racine du polynôme $P(x)$

$P(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-8+10+6=0$

donc -2 est racine du polynôme $P(x)$

Exercice9 : soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1)verifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2)factoriser $P(x)$

Solution :1) $P(1)=2\times1^2-1-1=0$

Donc : 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) 1 est racine du polynôme $P(x)$ donc : $P(x)$ est divisible par $x-1$

en Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ On trouve : $Q(x)=2x+1$

donc : $P(x)=(x-1)(2x+1)$

Exercice10 : soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1) calculer $P(-3)$ et que peut-on dire ?

2)déterminer le le polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x+3)Q(x)$

Solution : 1)en remplaçons x par -3 dans le polynôme

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

on a : $P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)-6=-27+27+6-6=0$

donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

2)donc : $P(x)$ est divisible par $x+3$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x+3)Q(x)$ et puisque le degré de $P(x)$ est 3 donc le degré de $Q(x)$ est 2 donc : $Q(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

Methode1 : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

Donc : $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

Donc : $a=1$ et $b+3a=3$ et $3c=-6$

Donc :et $b=0$ $a=1$ et $c=-2$

Donc : $Q(x)=x^2-2$

Methode2 : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$=x^2(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x^2-2)$ donc : $Q(x)=x^2-2$

Methode3 : Effectuer la division euclidienne de $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$ par $x+3$ et déterminer le quotient et le reste

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\ \cline{1-1} -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On a donc :

$P(x)=(x+3)Q(x)+P(-3)=(x+3)(x^2-2)+0=(x+3)(x^2-2)$

$Q(x)=x^2-2$ est le quotient et $P(-3)=0$ le reste

Exercice11 : Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1)Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-3$

2)factoriser $P(x)$

Solution :1) $P(3)=0$ donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

2)en Effectuant la division euclidienne de $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ par $x-3$

On aura : $P(x)=(x-3)\times(2x^2+x-1)$

Exercice12 : soit le polynôme :

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ et déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste

2)montrer que $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Solution :1)

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 \qquad\qquad & x^2-4x+3 \\ \cline{1-1} -4x^2-5x+6 & \\ 4x^2+8x \qquad & \\ \cline{1-1} 3x+6 & \\ -3x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc : $Q(x)=x^2-4x+3$ le reste 0

2) $Q(3)=0$ donc 3 est racine du polynôme $Q(x)$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3)on a : $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

en Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-3$

On aura : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

Donc : $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

Exercice13 : Soit : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

1)montrer que1 est racine du polynôme P

2)montrer que $P(x)=(x-1)Q(x)$

Ou $Q(x)$ est un polynôme a déterminer

3) montrer que -2 est racine du polynôme Q

4) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

5) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

Solution :1)

On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$

donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

2)Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

On trouve : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$ ①

donc : $Q(x)=x^2-2x-8$

3)on a : $Q(-2)=(-2)^2-2(-2)-8=4+4-8=0$

Donc -2 est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

4)Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

On trouve : $Q(x)=(x+2)(x-4)$ ②

D'après ① et ② on a : $P(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$

5) $P(x)=0$ ssi $(x-1)(x+2)(x-4)=0$

ssi $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$

$P(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

Donc : $S=\{-2;1;4\}$

Exercice14 : Soit : $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

Avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1)déterminer a et b tels que

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b)le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) factoriser $P(x)$ dans ce cas

Solution :1) $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc : $P(2)=0$

Donc : $2\times2^3+3\times2^2+a\times2+b=0$

Donc : $2a+b+28=0$ (1)

b) le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

donc : $P(1)=-12$ donc : $a-b+17=0$ (2)

donc le couple (a,b) est solution du système suivant :

$$\begin{cases}2a+b+28=0\\ a-b+17=0\end{cases}$$

On résolvant le système on trouve : $a=-11$ et $b=-6$

Donc : $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$

2) factorisation de $P(x)$ dans ce cas :

$P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-11x-6 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x^3+4x^2 & 2x^2+7x+3 \\ \cline{1-1} 7x^2-11x-6 & \\ -7x^2+14x & \\ \cline{1-1} 3x-6 & \\ -3x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

Exercice15 : Soit : $P(x)=x^3-3x+2$

1)a)calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-1)Q(x)$

b)verifier que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$

2)soit α un réel tel que : $1<\alpha<2$

Donner un encadrement de $\alpha+2$ et de : $(\alpha-1)^2$

Et en déduire que : $0<P(\alpha)<4$

Solution :1)a) $P(x)=x^3-3x+2$

$P(1)=1^3-3\times1+2=1-3+2=0$

Donc $P(x)$ soit divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & 2x^2+7x+3 \\ \cline{1-1} x^2-3x+2 & \\ -x^2+x & \\ \cline{1-1} -2x+2 & \\ 2x-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b)vérifions que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$?

$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$

$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=x^2-4x+2=P(x)$

2) $1<\alpha<2$ donc $3<\alpha+2<4$ (1)

Donc : $0<\alpha-1<1$ donc $0<(\alpha-1)^2<1\ (2)$

De (1) et (2) on a alors : $0<(\alpha+2)(\alpha-1)^2<4$

Donc $0<P(\alpha)<4$

Exercice16 : Soit : $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) verifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2)montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$

Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) verifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) en Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-2)Q(x)$

5) en déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) déterminer les réels a ; b ; c tel que :

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$

7) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Solution :1) $P(0)=2\neq 0$ Donc 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) $P(x)$ racine du polynôme est α

Ssi $P(\alpha)=0$ ssi $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

On calcul $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=؟$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)+14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right)+2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2-9\alpha+14\alpha^2-9\alpha^3+2\alpha^4}{\alpha^4}$$

Et puisque $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

Donc : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

Donc : $\frac{1}{\alpha}$ Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) $P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

Donc :2 est racine du polynôme $P(x)$

4)en Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

On trouve que : $P(x)=(x-2)\times(2x^3-5x^2+4x-1)$

5) on a 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $\frac{1}{2}$ Est aussi racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et puisque $P(x)=(x-2)Q(x)$

Alors : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ or $\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq 0$

Donc : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6)en Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-\frac{1}{2}$

On trouve : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

Donc : $a=2$ et $b=-4$ et $c=2$

7)on a : $P(x)=(x-2)Q(x)$ et $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

Donc : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

On factorise aussi : $2x^2-4x+2$

On remarque que 1 est racine

en Effectuant la division euclidienne de $2x^2-4x+2$ par $(x-1)$ On trouve : $2x^2-4x+2=(x-1)(2x-2)$

finalement : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$P(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$

$P(x)=(x-2)(2x-1)(x-1)^2$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien