Les polynômes

I) Définition d'un polynôme

a) L'expression : V(x) = $x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3 On note deg (V) = 3.
Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du Polynôme V(x).
$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.
x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.
15x est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

b) Un polynôme est une somme de monômes.
Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$, $Q(x)$, ... Le degré du polynôme P, noté degP, est celui de son monôme de plus haut degré.

c) Remarque et exemples :

- $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ Est un polynôme de degré 4 ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$
- $R(x)=x^3+3x^2-\frac{2}{x}-1$ n'est pas un polynôme
- $E(x)=\sqrt{x}+x^2-3$ n'est pas un polynôme
- $F(x)=2=2x^0$ Est un polynôme de degré 0 et

S'appelle un polynôme constant

- un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x)=ax+b$
- un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

d) Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P = Q s si . $P(x)=Q(x)$ Pour tout x réel

e) Deux polynômes P et Q sont égaux
si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

2) opérations sur les polynômes

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes
La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$
tel que : $(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$
pour tous $x\in\mathbb{R}$
et $\deg(P+Q)\le\max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$
Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que : $(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
et $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls
Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ
et tel que : $(PQ)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ $x\in\mathbb{R}$
et : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

3)La division euclidienne d'un polynôme par $x-a$ et factorisation

a) Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$ Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq : $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$ Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

b) Soient P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$ On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a)=0$

c) Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$. a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x-a$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien