

Les polynômes

Leçon : les polynômes

Présentation globale

I) Définition d'un polynôme

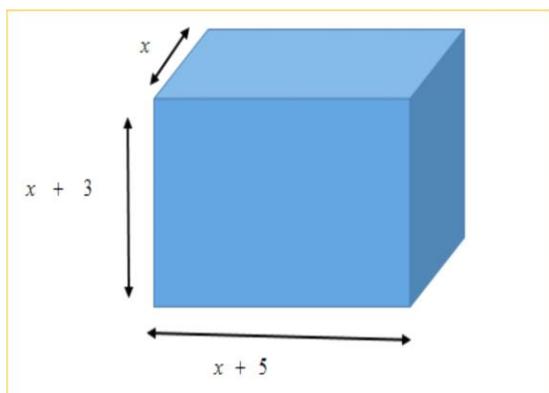
II) Les polynômes et les opérations

III) La valeur absolue et propriétés La division par $x - a$ et factorisation de polynômes

I) Définition d'un polynôme

Activité :

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x , $x + 3$ et $x + 5$ avec x réel strictement positif. Soit $V(x)$ le volume de ce parallélépipède



- 1) Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$
- 2) Calculer $V(1)$ et (2) .
- 3) Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer $V(1)$ et $V(2)$?

Vocabulaire

L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3

On note $\deg(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15, 0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

$8x^2$ est un monôme de la variable x , de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

$5x$ est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

1) Définitions et exemples

a) monômes

Définition : Un monôme de la variable x est une expression de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}^*$

et $n \in \mathbb{N}$. a est appelé le coefficient et n est appelé le degré du monôme.

Exemples :

$4x^3$ est un monôme de la variable x, de degré 3 et de coefficient 4

$-\frac{1}{2}x$ est un monôme de la variable x, de degré 1 et de coefficient $-\frac{1}{2}$

-3 est un monôme de degré 0 et de coefficient -3

b) polynômes

Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x), Q(x)$, ... Le degré du polynôme P, noté $\deg P$, est celui de son monôme de plus haut degré.

Remarque et exemples :

1) $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 4 donc $\deg(P) = 4$.

Il est ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

2) $Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3)$

$$Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \text{donc } \deg(Q) = 3.$$

3) $R(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{2}{x} - 62$ n'est pas un polynôme

4) $E(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3$ n'est pas un polynôme

5) $F(x) = 2 = 2x^0$ est un polynôme de degré 0 et s'appelle un polynôme constant

6) $M(x) = 2x + 6$ est un polynôme de degré 1 et s'appelle un monôme

Donc un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x) = ax + b$

7) un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Application: Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(0) = P(1) = 5 \text{ et } P(-2) = 3$$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{On a } P(0) = 5 \text{ donc } a \times 0^2 + b \times 0 + c = 5 \text{ donc } c = 5$$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(1) = 5 \text{ donc } a \times 1^2 + b \times 1 + c = 5 \text{ donc } a + b + c = 5 \text{ donc } a + b + 5 = 5 \\ \text{donc } a + b = 0 \text{ ①} \end{aligned}$$

On a $P(-2)=3$ donc $a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 5 = 3$ donc $4a - 2b + 5 = 3$
donc $4a - 2b = -2$ ②

donc On a le système suivant : $\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ b = -a \end{cases}$

donc $4a + 2a = -2$ donc $6a = -2$ donc $a = -\frac{1}{3}$ donc $b = \frac{1}{3}$

Alors : $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

2) Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes P et Q sont **égaux** et on écrit $P = Q$ lorsqu'ils prennent la même valeur numérique en tout réel, c.-à-d. $P(x) = Q(x)$ pour tout x réel

Propriété. Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \text{et} \quad Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) \quad \text{et} \quad R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

$$\text{Solution : } Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \deg(Q) = 3$$

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \deg(P) = 3$$

Donc : $P(x) = Q(x)$ car $\deg(P) = \deg(Q)$ et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

Mais $P(x) \neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Application: soit : $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ et

$$Q(x) = ax^5 + (b+c)x^4 + (c+d)x^3 + dx^2 + e$$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P = Q$

Solution : $P = Q$ c ad $P(x) = Q(x)$ donc On a le système suivant :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 1 \\ c + d = -2 \\ d = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 0; d = 1; c = -1 \\ c = -2 - d = -2 - 1 = -3 \quad \text{donc } Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 \\ b = 1 - c = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

II) Les polynômes et les opérations

1) Activité : soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants :

$$P(x)+Q(x) ; P(x)-Q(x); 3P(x)-2Q(x)$$

$$1) P(x)=x^3+2x^2-1 ; Q(x)=3x^4-x^3+x$$

$$2) P(x)=x^5-x^2+3 ; Q(x)=-x^5+x^2-5$$

II) Calculer $P(x) \times Q(x)$ et $(P(x))^2$ dans chacun des cas suivants et comparer $\deg(PQ)$ et $\deg(P) + \deg(Q)$

$$1) P(x)=x^2-1 ; Q(x)=x^2+2x-3$$

$$2) P(x)=x^4-x^2+2 ; Q(x)=3x+2$$

$$\text{Solution : I) 1)} P(x)=x^3+2x^2-1 ; Q(x)=3x^4-x^3+x$$

$$\text{On a : } P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$$

$$\text{donc } P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$$

$$\text{On a : } P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$$

$$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$$

$$3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$$

$$\deg(P)=3 ; \deg(Q)=4 ; \deg(P+Q)=4 ; \deg(P-Q)=4$$

$$\text{II) 2) } P(x)=x^5-x^2+3 ; Q(x)=-x^5+x^2-5$$

$$\text{On a : } P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$$

$$\text{On a : } P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$$

$$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$$

$$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10=5x^5-5x^2+19$$

$$\deg(P)=5 ; \deg(Q)=5 ; \deg(P+Q)=0 ; \deg(P-Q)=5$$

$$\text{III) 1) on a } P(x)=x^2-1 ; Q(x)=x^2+2x-3$$

$$P(x) \times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$$

$$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2 \times 1+1=x^4-2x^2+1$$

$$\text{III) 2) } P(x)=x^4-x^2+2 ; Q(x)=3x+2$$

$$P(x) \times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$$

$$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$$

$$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$$

$\deg(P \times Q) = 5$ $\deg(P) = 4$; $\deg(Q) = 1$

Donc $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\deg(P^2) = 2\deg(P)$

2) Résumé :

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P + Q$ et tel que :

$$(P + Q)(x) = (P)(x) + (Q)(x) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que :

$$(\alpha P)(x) = \alpha \times (P)(x) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : $\deg(\alpha P) = \deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ et tel que :

$$(PQ)(x) = (P)(x) \times (Q)(x) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

III) La division par $x - a$ et factorisation de polynômes

1) La division euclidienne d'un polynôme par $x - a$

Propriétés : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$

Il existe un unique polynôme Q de degré $n - 1$ et tq :

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a) \text{ Pour tous } x \in \mathbb{R}$$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ et $a = -3$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \\ -x^3 - 3x^2 \\ \hline -2x - 6 \\ - 2x - 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 3 \\ \hline x^2 - 2 \end{array}$$

On a donc : $P(x) = (x+3)Q(x) + P(-3) = (x+3)(x^2 - 2) + 0 = (x+3)(x^2 - 2)$

$Q(x) = x^2 - 2$ est le quotient et $P(-3) = 0$ le reste

Remarques : 1) Le schéma de la division euclidienne des polynômes ressemble beaucoup à celui de la division euclidienne des entiers

2) Remplaçons x par -3 dans le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$$P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 2(-3) - 6 = -27 + 27 + 6 - 6 = 0$$

On dit que -3 est racine du polynôme $P(x)$

3) Le reste de la division de $P(x)$ par $x+3$ est 0. on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$.

2) Racine d'un polynôme :

Définition : Soient P un polynôme et soit $a \in \mathbb{R}$

On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a) = 0$

Exemples : Soit : $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

1) $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

2) $P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1 \neq 0$ donc 1 n'est pas une racine du polynôme P

Propriété : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in \mathbb{R}$

a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x - a$.

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a) \text{ Pour tous } x \in \mathbb{R}$$

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

On a $P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

$$\text{On trouve : } P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8) \quad ①$$

$$\text{On pose : } Q(x) = x^2 - 2x - 8 \quad \text{on a : } Q(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

Donc -2 est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

$$\text{On trouve : } Q(x) = (x+2)(x-4) \quad ②$$

$$\text{D'après } ① \text{ et } ② \text{ on a : } P(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$$

$P(x) = 0$ ssi $(x-1)(x+2)(x-4) = 0$ ssi $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$
 $P(x) = 0$ ssi $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

Pour réduire le nombre de multiplications lors de l'évaluation d'un polynôme, le mathématicien anglais William George Horner (1786 - 1837) a inventé un algorithme pratique.

