

L'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 01 :

Comparer les deux nombres a et b dans les cas suivants :

- 1) $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = (2 - \sqrt{3})^2$.
- 2) $a = 5 + \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{25 + 10\sqrt{2}}$.
- 3) $a = \sqrt{10}$ et $b = \sqrt{3} + \sqrt{7}$.
- 4) $a = 4 + \sqrt{17}$ et $b = 3\sqrt{2} + \sqrt{17}$.
- 5) $a = 4\sqrt{5} - \sqrt{79}$ et $b = 9 - 4\sqrt{5}$.

Exercice 02 :

- 1) Soit $a > 0$ et $b < 0$, posant $A = \frac{9a - 4b}{3a - 2b}$.
Montrer que : $2 < A < 3$.
- 2) Soit $a > 0$ et $b > 0$, posant $A = \frac{12a + 10b}{3a + 2b}$.
Montrer que : $4 < A < 5$.

Exercice 03 :

Soient a et b deux réels distincts strictement positifs.

- 1) Montrer que : $a^2 + b^2 > 2ab$.
- 2) Montrer que : $\frac{2}{a^2 + b^2} < \frac{1}{ab} < \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}$.
- 3) Dédurre que : $3,75 < \sqrt{15} < 4$.

Exercice 04 :

Soient a et b des nombres réels tels que :

$$-6 < a < 3 \text{ et } 5 < b < 9$$

Encadrer les nombres suivants :

$$ab ; a^2 ; b^2 ; 3a^2 + b^2 - a + b.$$

Exercice 05 :

- 1) Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :
 $3 \leq x \leq 7$; $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$; $-3 < x \leq 0$; $-5 \leq x < -8$; $x \geq 5$;
 $x \leq 7$; $x > \frac{6}{11}$; $x < 0$.
- 2) Ecrire les intervalles suivantes sous forme d'inégalités :
 $[2; 5[$; $]-2; +\infty[$; $]-\infty; 0]$; $[\frac{1}{3}; +\infty[$; $]4; 5[$; $]-3; 3]$.

Exercice 06 :

Simplifier :

$$]-3; 4[\cap [2; 7[; [-8; 4[\cap [10; 20[;]-\infty; 1[\cap \left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[$$

$$]5; 9[\cup [4; 8[; [-5; -2[\cup [-3; +\infty[;]-\infty; \frac{2}{7}[\cup \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$$

Exercice 07 :

- 1) Soient x et y des nombres réels tels que : $x \in [-2; 5]$ et $y \in [-3; -1]$ simplifier l'expression :
 $A = 2|2x + 7| - |3y| + 2|y + 8| - |2y - x|$
- 2) Simplifier les nombres : $\sqrt{(5\sqrt{7} - 59\sqrt{3})^2}$; $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$;
 $|-5\sqrt{13} - 13\sqrt{5}|$; $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
- 3) Soient a et b des nombres réels tels que : $a \in \mathbb{R}^-$ et $b \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.
Simplifier $\sqrt{(3b - 1)^2}$ et $\sqrt{(a - 5)^2}$.
- 4) Résoudre les équations :
 $|5x + 2| = 8$; $|-2x + 1| = -1$; $|2x - 1| = |3x - 4|$.
- 5) Résoudre les inéquations :
 $|2x - 3| \leq 1$; $|6x + 11| \geq \frac{1}{6}$; $2 \leq |10x + 2| \leq 5$.

Exercice 08 :

Soient x et y des nombres réels tels que :

$$x \geq -2 ; y \leq -1 ; x - y = 6.$$

1) Calculer : $A = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(y+1)^2}$.

2) Montrer que : $x \leq 5$ et $y \geq -8$.

3) Établir que : $0 \leq x^2 + y^2 \leq 89$.

4) Calculer $B = |x + y - 4| + |x + y + 10|$.

Exercice 09 :

Soient a et b des nombres réels tels que : $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$

1) Encadrer le nombre $ab + 1$ et déduire que $ab + 1 \neq 0$.

2) Montrer que : $\left| \frac{a+b}{ab+1} \right| \leq 1$.

Exercice 10 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$.

1) Montrer que : $A > 0$ et déduire que : $B > 2|x|$.

2) Calculer AB et déduire que : $A < \frac{1}{2|x|}$ pour $x \neq 0$.

3) Démontrer que pour tout $x \neq 0$:

$$|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}.$$

4) Donner un encadrement d'amplitude $\frac{1}{66}$ pour le nombre $\frac{\sqrt{122}}{3}$.

Exercice 11 :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\left| 2x - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}$ et $\left| y - \frac{3}{4} \right| < \frac{1}{4}$.

1) Démontrer que : $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ et $y \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

2) Vérifier que : $xy - 3x - y - 1 = (x - 2)(y - 3) - 7$.

3) En déduire que : $-5 < xy - 3x - y - 1 < \frac{-13}{4}$.

Exercice 12 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $|x - 1| < \frac{1}{2}$. Démontrer que $\frac{4}{5}$ est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{x}$ avec la précision $\frac{2}{3}$.

Exercice 13 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que α est une valeur approchée par excès de $\frac{1}{3}$ à 2×10^{-1} près.

1) Montrer que : $\frac{2}{15} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ puis donner un encadrement de $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left| \frac{x-1}{\alpha} \right| < \frac{1}{10}$, montrer que $\frac{29}{30} < x < \frac{31}{30}$.

Exercice 14 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in [3; +\infty[$. Posant $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

1) Montrer que : $A - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}$.

2) a) Établir que : $2\sqrt{x-1} < \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 2\sqrt{x}$.

b) Déduire que : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} < A - 1 < \frac{1}{2(x-1)}$.

3) a) Montrer que $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2x}$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.

b) Déduire que : $1 + \frac{1}{2x} < A < 1 + \frac{3}{4x}$.

4) Déduire que $\frac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision 5×10^{-2} .