Résumé de Cours **PROF : ATMANI NAJIB** **Tronc CS**

L'ordre dans : $\mathbb{R}$

I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1) soient a et b deux réels.

$a \le b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \ge 0$

$b \ge a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \ge 0$

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a>0$

a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a<0$

Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de *a* – *b*.

2) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

a) Soient a et b et c trois nombres réels

- ✓ Si $a \le b$ alors $a+c \le b+c$ et $a-c \le b-c$
- ✓ Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a+c \le b+d$

b) $ab \ge 0$ ssi $a \ge 0$ ou $b \ge 0$ ou $a \le 0$ ou $b \le 0$

(le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

c) si $a \le b$ et $c \ge 0$ alors $ac \le bc$

si $a \le b$ et $c \le 0$ alors $ac \ge bc$

d) si $0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$ alors $ac \le bd$

si $0 \le a \le b$ alors $a^2 \le b^2$ et $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

e) si $a \le b \le 0$ alors $a^2 \ge b^2$

f) si $ab>0$ on a : si $a \le b$ alors $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

3)La valeur absolue

a) $x \in \mathbb{R}$ Si $x \ge 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \le 0$ alors $|x| = -x$

b)Si *x* est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \ge 0$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives a et b sur un axe normé(gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note $AB = |a-b|$ et $|a-b| = |b-a|$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$

$$|x| \ge 0 \;;\; |x^2| = |x|^2 = x^2 \;;\; -|x| \le x \le |x| \;;\; |x| = |-x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \;;\; |xy| = |x||y| \;;\; |x+y| \le |x|+|y| \;;\; \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$|x| = a$ équivaut à dire que $x = a$ ou $x = -a$

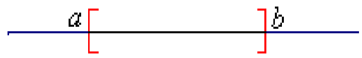
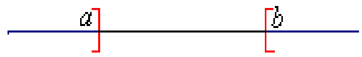
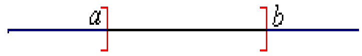
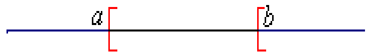
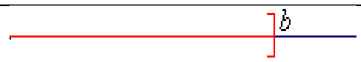
$|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ **ou** $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.

4)Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

a) *a* et *b* sont deux réels tels que *a* < *b*.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté …	**inégalité …**	**Représentation de cet intervalle sur une droite graduée**
$[a\,;\,b]$	$a \le x \le b$	
$]a\,;\,b[$	$a < x < b$	
$]a\,;\,b]$	$a < x \le b$	
$[a\,;\,b[$	$a \le x < b$	
$[a\,;\,+\infty[$	$a \le x$	
$]a\,;\,+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty\,;\,b]$	$x \le b$	
$]-\infty\,;\,b[$	$x > b$	

b) [*a* ; *b*],]*a* ; *b*[,]*a* ; *b*] et [*a* ; *b*[sont des intervalles d'extrémités *a* et *b* (*a* < *b*). Le centre de l'intervalle est le nombre $\frac{b-a}{2}$, et sa **l**ongueur est *b* – *a*.

c) -∞ (moins l'infini) et +∞ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.

Du côté de -∞ et de +∞, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi]-∞ ; +∞[.

$\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$

d)Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

e) Soient a, b et x trois nombres réels tq $a \le b$.

On pose $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b]$

(Intervalles ***bornés*** d'extrémités a et b.)

Le ***réel*** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de intervalle I

Le ***réel*** $b-a$ est le amplitude de intervalle I

Le ***réel*** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de intervalle I

f) Les intervalles et la valeur absolue

$x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$|x| \le r$ ssi $-r \le x \le r$ ssi $x \in [-r;r]$

$|x| \ge r$ ssi $x \ge r$ ou $x \le -r$

5)L'encadrement et la valeur approché

5-1) Encadrement :

Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proche a et b tel que, $a < x < b$ ou $a \le x \le b$ ou $a < x \le b$ ou $a \le x < b$

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude b-a

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

5-2) Encadrements et opérations

- Encadrements et additions

Considérons deux réels x et y tels que :

$a < x < b$ et $c < y < d$ alors on a $a+c < x+y < b+d$.

Remarque : Pour encadrer le résultat d'une différence a-b on commencera par encadrer -b avant…

-Encadrements et multiplications

Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :

$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.

Le produit xy est alors encadrée par ac et bd.

On a $ac < xy < bd$.

Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

Remarque : *Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

5-3) Valeur approchée d'un nombre.

a) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque $|x-a| \le r$.

b) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque $a \le x \le a+r$. a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque :

$a - r \le x \le a$.

Exemples: 1) on a $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$ donc

$1,40 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$

$-0,02 < \sqrt{2} - 1,40 < 0,02$ donc $|\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40 \le \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) on a $1,42 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

5-4) Approximation décimale.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \le x \le (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près

$(N+1) \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près

Exemple :: on a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc

$333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$

333333×10^{-6} est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien