I. Ordre et opérations dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

A. Ordre dans $\mathbb{R}$:

a. Activité :

a et b de l'ensemble $\mathbb{R}$.

1. Trouver une comparaison entre a et b pour les cas suivants :

- $(b-a)\in\mathbb{R}^{+}$ puis $(a-b)\in\mathbb{R}^{+}$.
- $(b-a)\in\mathbb{R}^{+*}$ puis $(b-a)\in\mathbb{R}^{+*}$.

2. Donner les définitions .

b. Définitions :

a et b de l'ensemble $\mathbb{R}$.

- a est inférieur ou égale à b équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^{+}$ on note $a\leq b$.
- a est strictement inférieur à b équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^{+*}$ on note $a<b$.
- a est supérieur ou égale à b équivaut à $(a-b)\in\mathbb{R}^{+}$ on note $a\geq b$.
- a est strictement supérieur à b équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^{+*}$ on note $a>b$.

c. Exemple :

- On a : $\frac{2}{7}>\frac{1}{7}$ et $\sqrt{2}<2$ et $-100<1$.
- Comparer les deux nombres : $a=5-\sqrt{3}$ et $b=2\sqrt{3}$.

B. Propriétés de l'ordre et les opérations :

a. Activité :

1. Rappeler quelques propriétés ?
2. Démontrer une propriété .

b. propriétés :

a et b et c et d de $\mathbb{R}$.

- si $(a\leq b \text{ et } b\leq c)$ alors $a\leq c$.(l'ordre est transitive).
- si $(a\leq b \text{ et } c\in\mathbb{R})$ alors $a+c\leq b+c$ et $a-c\leq b-c$.
- si $(a\leq b \text{ et } c\leq d)$ alors $a+c\leq b+d$ (l'ordre est compatible avec l'addition) .
- si $(c>0 \text{ et } a\leq b)$ alors $a\times c\leq b\times c$ et $\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.
- si $(c<0 \text{ et } a\leq b)$ alors $a\times c\geq b\times c$ et $\frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}$.
- si a et b non nuls et de même signe on a : $a\leq b$ équivaut à $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$.
- Si a et b sont positifs on a $a\leq b$ équivaut à $a^2\leq b^2$.
- Si a et b sont positifs on a $a\leq b$ équivaut à $a^n\leq b^n$ (avec $n\in\mathbb{N}$)
- Si a et b sont positifs on a $a\leq b$ équivaut à $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.

c. Exercice : x est réel tel que : $1\le x\le 7$ donner un encadrement du nombre $B=2x+\dfrac{3}{x}$.

d. Remarques :

- L'écriture : $a\le x$ et $x\le b$ sera notée $a\le x\le b$. On lit x est compris entre a et b .
- L'écriture : $a<x$ et $x<b$ sera notée $a<x<b$. On lit x est strictement compris entre a et b .

II. Les intervalles –encadrement :

A. Intervalle :

a. Activité :

Compléter le tableau suivant :

Les intervalles bornés		
inégalités	**Représentation sur une droite graduée**	**intervalles**
$2\le x\le 4$		$[2,4]=\{x\in\mathbb{R} / 2\le x\le 4\}$
$2<x<4$		
$2<x\le 4$		
$2\le x<4$		
Les intervalles non bornés		
inégalités	**Représentation sur une droite graduée**	**intervalles**
$x>1$		$]1,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} / x>1\}$
$x\ge 1$		
$x<3$		
$x\le 2$		

b. Application :

On considère les intervalles suivants : $[1,4]$; $]-2,0[$ et $]-3,2]$.

1. Donner la représentation des intervalles précédents .

2. Donner la longueur de chaque intervalle des intervalles précédents .
3. Préciser le centre de chaque intervalle des intervalles précédents .
4. Que représente chaque nombre des nombres suivants : $1,5$ et 1 et $2,5$ respectivement pour les intervalles suivants $[1,4]$; $]-2,0[$; $]-3,2]$.

c. Vocabulaire :

a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a<b$.

Pour les intervalles suivants $[a,b]$ et $]a,b[$ et $[a,b[$ et $]a,b]$ on a :

- a et b sont appelés les extrémités de l'intervalles .
- Le nombre positif $b-a$ est appelé la distance entre a et b.(sachant que $a<b$)
- Le nombre positif $b-a$ est appelé la longueur (ou capacité) des intervalles précédents .
- Le nombre $x_0=\frac{a+b}{2}$ représente le centre des intervalles précédents .
- Le nombre positif $r=\frac{b-a}{2}$ représente le rayon des intervalles précédents.
- Les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres .
- $\mathbb{R}_+^*=\mathbb{R}^{+*}=]0,+\infty[$; $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^*=\mathbb{R}^{-*}=]-\infty,0[$; $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$ et $]a,a[=\varnothing$.
- $\varnothing$ est un intervalle on l'appelé ensemble vide .

B. Encadrement :

a. Définition :

x est un nombre réel .

- Réaliser un encadrement du nombre x c'est trouver deux nombres réels a et b tel que $a<b$ on a : $a\le x\le b$ ou bien $a<x\le b$ ou bien $a\le x<b$ ou bien $a<x<b$.
- Le nombre réel positif $b-a$ s'appelle l'amplitude de cet encadrement .

b. Exercice :

1. Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $0,01$.
2. Soit $x\in\left]\frac{1}{3},1\right[$.

- Déterminer un encadrement du nombre $x+4$ et préciser son amplitude .
- En déduit un encadrement du nombre $\frac{x}{x+4}$ et préciser son amplitude .
- Vérifier que $\frac{x}{x+4}=1-\frac{4}{x+4}$
- Déterminer un encadrement du nombre $\frac{x}{x+4}$ d'amplitude $\frac{112}{65}$.

III. Intersections et réunions d'intervalles :

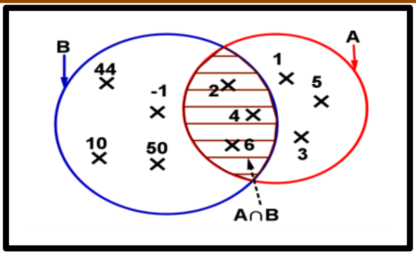
A. Intersections d'intervalles :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Tous les éléments communs de A et de B constituent l' ensembles noté $A\bigcap B$ appelé intersection de A et B. Donc : $A\bigcup B=\{x/x\in A \text{ et } x\in B\}$.

b. **Remarque :** $x \in A \cap B$ équivaut à $(x \in A \text{ et } x \in B)$.



c. **Exemple :** soient : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,44,50\}$.

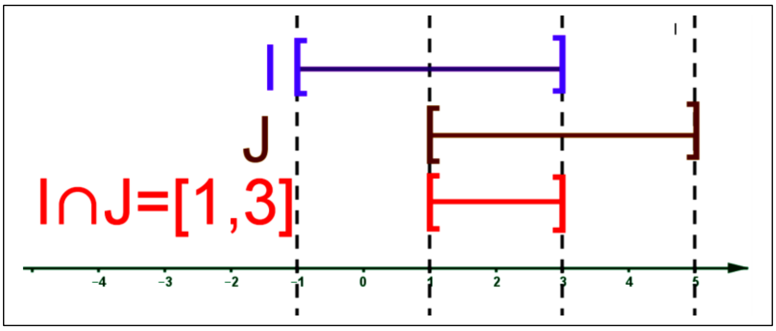
d. **Exemples pour les intervalles :**

Remarque :
On va décaler les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raison de clarté du dessin en réalité la représentation graphique des intervalles reste toujours des parties de l'axe gradué .

- **Exemple 1 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J = [1,5]$ (couleur maron)

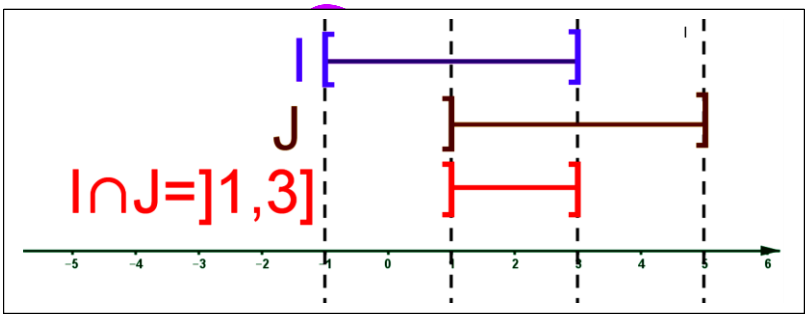
on a : $I \cap J = [-1,3] \cap [1,5] = [1,3]$ intersection couleur rouge .



- **Exemple 2 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J =]1,5]$ (couleur maron)

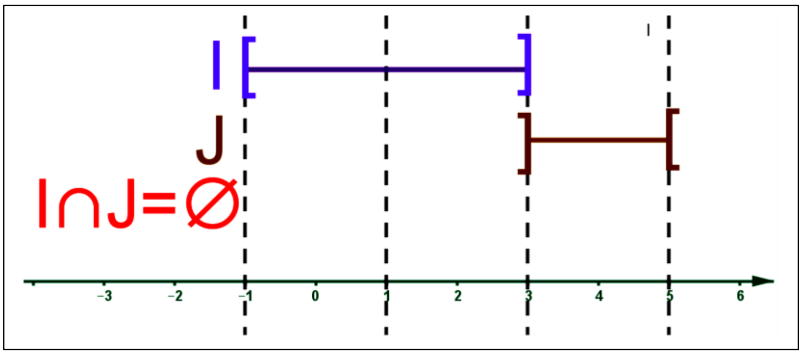
on a : $I \cap J = [-1,3] \cap]1,5] =]1,3]$ intersection couleur rouge .



- **Exemple 3 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J =]3,5[$ (couleur maron)

on a : $I \cap J = [-1,3] \cap]3,5[= \varnothing$ intersection couleur rouge (pas de couleur)



B. Réunions d'intervalles :

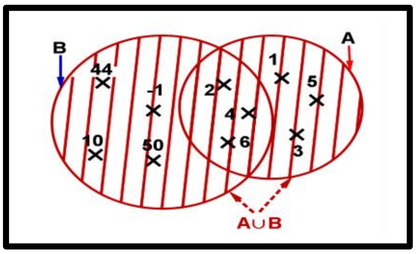
a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Tous les éléments qui appartiennent soit à A ou soit à B constituent l' ensembles noté $A \cup B$, appelé union de A et B . Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

b. Remarque :

$x \in A \cup B$ équivaut à $(x \in A \text{ ou } x \in B)$.



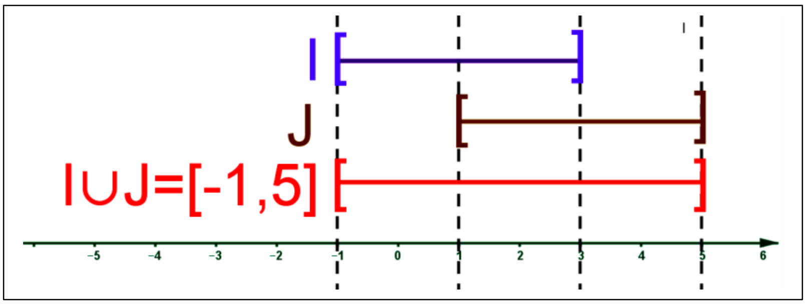
c. Exemple :

soient : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,44,50\}$

- **Exemple 1 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J = [1,5]$ (couleur maron)

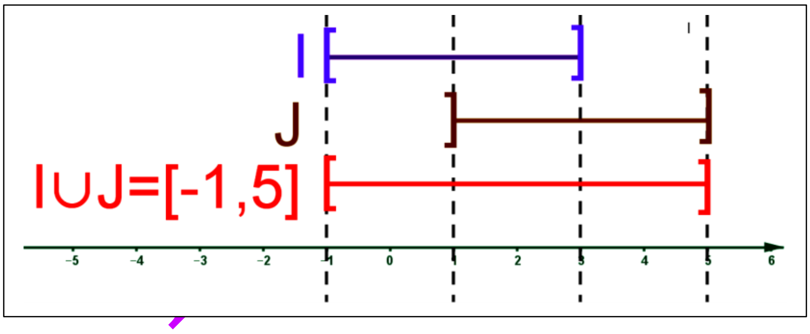
on a : $I \cup J = [-1,3] \cup [1,5] = [-1,5]$ réunion couleur rouge .



- **Exemple 2 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J =]1,5]$ (couleur maron)

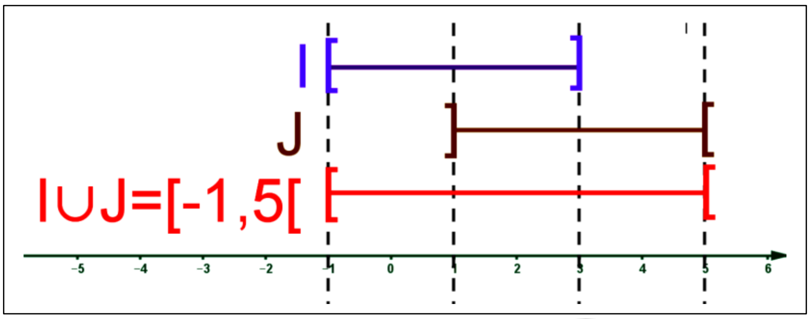
on a : $I \cup J = [-1,3] \cup]1,5] = [-1,5]$ réunion couleur rouge .



- **Exemple 3 :**

$I = [-1,3]$ (couleur violet) et $J =]3,5[$ (couleur maron)

on a : $I \cup J = [-1,3] \cup]3,5[= [-1,5[$ réunion couleur rouge .

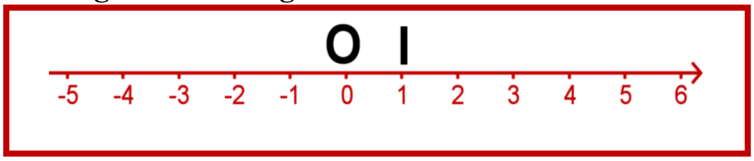


IV. Valeur absolue d'un nombre réel et propriétés :

A. Valeur absolue d'un nombre réel :

a. Activité :

Soit une droite graduée d'origine O et d'unité de mesure $OI = 1$



1. Construire les points A et B et C d'abscisses 3 et -2 et 2.
2. Donner les distances suivantes : OA et OB et OC .

b. Vocabulaire :

- Le nombre positif $OA = 3$ est appelé la valeur absolue du nombre 3 on note $OA = 3 = |3|$.
- Le nombre positif $OB = 2$ est appelé la valeur absolue du nombre -2 on note $OB = 2 = |-2|$.
- Le nombre positif $OC = 2$ est appelé la valeur absolue du nombre 2 on note $OC = 2 = |2|$.

c. Définition :

x est un nombre réel . (D) est une droite graduée d'origine O et d'unité de mesure $OI = 1$

le point M est un point de (D) dont l'abscisse est x .

la valeur absolue du nombre x est la distance OM on note $OM = |x|$.

d. Remarques :

- $x \in [0, +\infty[$ (càd $x \geq 0$) on a : $|x| = x$.
- $x \in]-\infty, 0]$ (càd $x \leq 0$) on a : $|x| = -x$.
- $|0| = 0$ et $|-x| = |x|$ et $|x| \geq 0$

e. Exemples : $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$; $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$; $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

B. Propriétés de la valeur absolue :

a. Propriétés :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on a : $|a \times b| = |a| \times |b|$ et $|a^n| = |a|^n$ $n \in \mathbb{N}$; $|a^{-n}| = |a|^{-n}$ $(a \neq 0)$.
- Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on a : $|a+b| \leq |a| + |b|$.
- Pour tout b de $\mathbb{R}^*$ on a : $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$.
- Pour tout b de $\mathbb{R}^*$ on a : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on a : $|a| = |b|$ équivaut à $(a = -b$ ou $a = b)$.

b. Exemple :

Simplifier l'expression suivante $\sqrt{(2x-3)^2}$ sachant que $x \geq 2$.

C. Distance et la valeur absolue :

a. Définition :

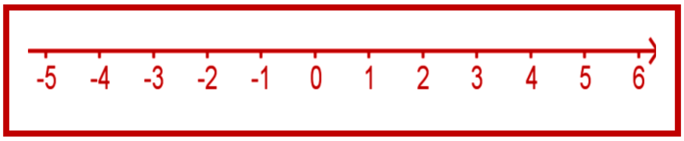
Soit une droite graduée d'origine O. Notons A d'abscisse a et B d'abscisse b.

Le nombre positif $|b-a|$ est appelé la distance entre les points entre A et B.

on a : $AB = |b-a|$.

b. Exercice :

On considère la droite graduée suivante :



1. Trouver les nombres réels x qui vérifie :

- $|x| \leq 2$ puis $|x| \geq 2$.
- Donner la propriété .

2. Soient a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a < b$.

- Déterminer x_0 le centre du segment $[a,b]$ puis déterminer r le rayon du segment $[a,b]$.
- Ecrire $[a,b]$ en fonction de x_0 et r .
- Montrer que : $|x-x_0| \leq r$ équivaut à $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$.

c. Propriétés :

Soit x de $\mathbb{R}$ et r un nombre réel positif

- ❖ $|x| \leq r$ équivaut à $-r \leq x \leq r$.
- ❖ $|x| < r$ équivaut à $-r < x < r$.
- ❖ $|x| \geq r$ équivaut à $x \in]-\infty, r] \cup [r, +\infty[$.
- ❖ $|x| > r$ équivaut à $x \in]-\infty, r[\cup]r, +\infty[$.
- ❖ $|x-x_0| \leq r$ équivaut à $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$.
- ❖ On a : $[a,b] = [x_0 - r, x_0 + r]$ avec $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ centre de l'intervalle et $r = \dfrac{b-a}{2}$ son rayon

d. Exercice : Soit x de $\mathbb{R}$ tel que : $|x-3| \leq 2$ déterminer l'intervalle $[a,b]$ tel que $x \in [a,b]$.

V. Approximation – Approximation décimale :

A. Approximation:

a. Définitions :

Soit x de $\mathbb{R}$ et r un nombre réel strictement positif .

- ❖ On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $|x-a| \leq r$.
- ❖ On dit que a est une valeur approchée par excès (ou approximation par excès) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $a \leq x \leq a + r$.
- ❖ On dit que a est une valeur approchée par défaut (ou approximation par défaut) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $a - r \leq x \leq a$.

b. Exercice :

1. Donner l'intervalle I de centre 2 et de $0,5$.
2. Soit x de I . 1. Déterminer l'intervalle J tel que $\frac{1}{x} \in J$.

   2. déterminer une approximation du nombre $\frac{1}{x}$ à $\frac{2}{25}$ près (ou à la précision $\frac{2}{25}$).

c. Cas particulier :

Le nombre x vérifie : $a \le x \le a+r=b$ on a :

- ✓ Le nombre a est une valeur approchée par défaut de x à la précision $b-a$.
- ✓ Le nombre b est une valeur approchée par excès de x à la précision $b-a$.
- ✓ Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée par défaut de x à la précision $\frac{b-a}{2}$.

d. Exemple :

On a : $1,4142 \le \sqrt{2} \le 1,4143$.

- ✓ Le nombre $1,4142$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}.
  (car $b-a=1,4143-1,4142=0,0001=10^{-4}$).
- ✓ Le nombre $1,4143$ est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}.
  (car $b-a=1,4143-1,4142=0,0001=10^{-4}$).
- ✓ Le nombre $1,41425$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision 510^{-5}.
  (car $\frac{b-a}{2}=\frac{1,4143-1,4142}{2}=\frac{0,0001}{2}=0,00005=5\times10^{-5}=\frac{0,0001}{2}$)

B. Approximation décimale :

➢ **La partie entière d'un nombre réel :**

a. Activité :

Donner la partie entière des nombres suivants : 3 et $41,5$ et -7 et $-2,5$.

La parie entière de 21 est 21 on note $E(21)=21$.

La parie entière de $2,14$ est 2 on note $E(2,14)=2$.

b. Définition :

Pour tout nombre réel x il existe un nombre entier relatif unique p tel que : $p \le x < p+1$.

Le nombre p s'appelle la partie entière de x , on note : $E(x)=p$.

➢ **Approximation décimale :**

a. Activité :

Prenons l'exemple précédent : on a $1,4142 \le \sqrt{2} \le 1,4143$ donc

$14142\times10^{-4} \le \sqrt{2} \le (14142+1)\times10^{-4}$

On dit que :

- Le nombre $1,4142$ s'appelle approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}

- Le nombre $1,4143$ s'appelle approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}

b. Définitions :

Soit x de $\mathbb{R}$ et r un nombre réel et n est un nombre naturel tel que la partie entière du nombre $10^{n}\times x$ est p (c.à.d. $\left(E\left(10^{n}\times x\right)=p\right)$ ou bien $p\leq 10^{n}\times x<p+1$ d'où :

- Le nombre décimal $p\times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale par défaut du nombre x à la précision 10^{-n} (ou de l'ordre n) .
- Le nombre décimal $(p+1)\times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale par excès du nombre x à la précision 10^{-n} (ou de l'ordre n) .