

La projection dans le plan

Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB]

1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$,

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(C)$, $P_2(B)$, $P_2(M)$

Réponse : 1) soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

On a $A \in (AC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc

$$P_1(A) = C$$

On a $B \in (BC)$ donc B est invariante par la projection

$$P_1 \text{ donc } P_1(B) = B$$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection

$$P_1 \text{ donc } P_1(C) = C$$

Soit $M' = P_1(M)$ on a M le milieu de [AB]

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de [BC] donc M' est le milieu de [BC]

1) soit: P_2 la projection sur (AC)

parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc $P_2(A) = A$

On a $C \in (AC)$ donc C est invariante par la projection

$$P_2 \text{ donc } P_2(C) = C$$

On a $B \in (BC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc

$$P_2(B) = C$$

On a M le milieu de [AB] donc la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu

soit: M'' ce milieu donc $P_2(M) = M''$

Exercice2 : Soient ABC est un triangle et M un

point définie par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

1) Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et en déduire que

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

Réponse : 1) soit: P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc A est invariante par la projection

$$P \text{ donc } P(A) = A$$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P

$$\text{donc } P(C) = C$$

$$\text{On a aussi : } P(B) = C$$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le

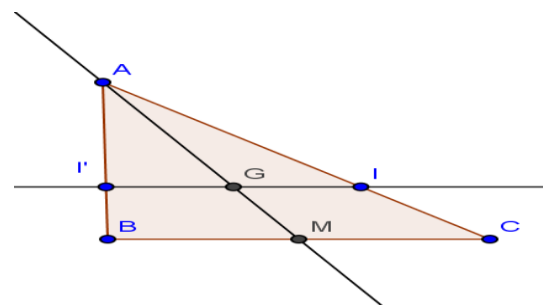
coefficient d'alignement de trois points

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$$

On a

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

Exercice3 : (réciproque de Thales):



Soient ABC est un triangle et I et I' deux

points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est par la projection de I sur

la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de $[BC]$; la droite (AM)

coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$

Réponse : 1) On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ donc $\|\overrightarrow{AI}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right\|$

donc $AI = \frac{2}{3} AC$ donc $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ donc $\|\overrightarrow{AI'}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \right\|$ donc

$AI' = \frac{2}{3} AB$ donc $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$ et d'après

la réciproque de Thales : $(II') \parallel (BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est

la projection de I sur la droite (AB)

parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu

de $[BC]$ Mq : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM)

Parallèlement à (BC)

On a $A \in (AM)$ donc A est invariante par la projection

P donc $P(A) = A$ ①

la parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle

coupe (AM) en M donc $P(C) = M$ ②

la parallèle à (BC) passant par I est (II') elle

coupe (AM) en G donc $P(I) = G$ ③

Et on a en plus $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ ④ donc D'après ① et ②

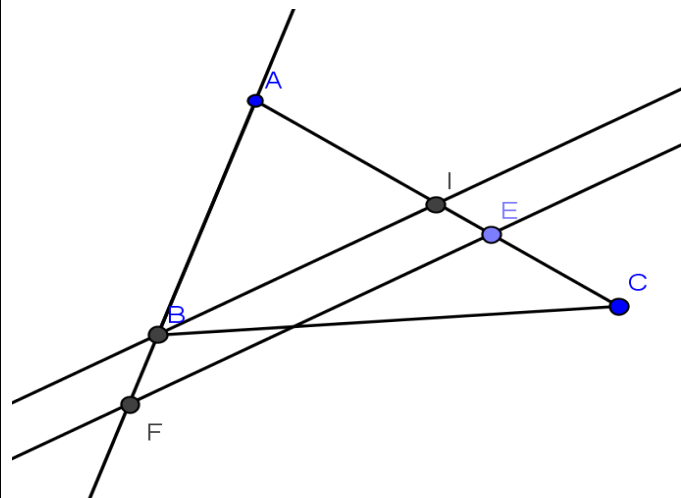
et ③ et ④ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$ car la projection

conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$. E un point de (AC) tel que :

$$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IC} \text{ et } P_{((AB);(IB))}(E) = F$$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$



Solution :

On a : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IC}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E) = F$ et $P_{((AB);(IB))}(I) = B$

et $P_{((AB);(IB))}(A) = A$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors :

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$

E un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle à (IB)

coupe (AC) en J

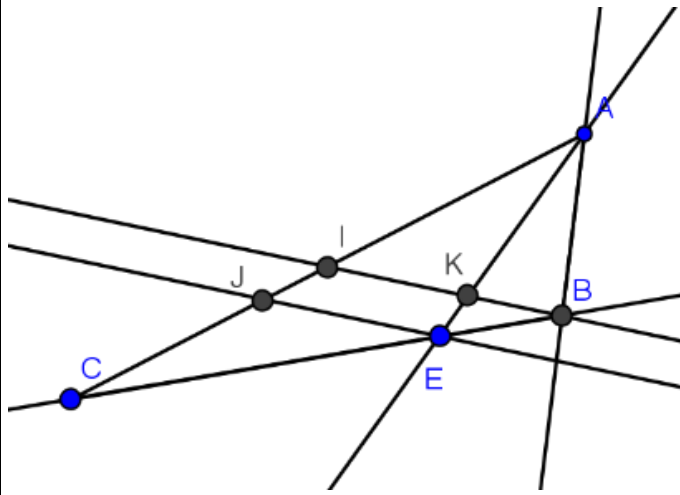
1) montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que :

$$\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$$

2) si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ montrer que :

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$$

Solution : 1) soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)



On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$ et

$P_{((AC);(IB))}(E) = J$ et $P_{((AC);(IB))}(C) = C$ et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$?

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$$

2) soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE) parallèlement à (IB)

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ et $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et

$P_{((AE);(IB))}(I) = K$ et $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

